Vilniaus universitetas

K. Maknys
G. Misevičius
V. Palenskis
S. Pralgauskaitė

TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR ATSITIKTINIŲ VYKSMŲ UŽDAVINIAI

(mokymo priemonė fizinių ir inžinerijos mokslų aukštųjų mokyklų studentams)

VILNIUS 2012

Recenzentai: VU FF dr (HP) E. Anisimovas
VU MIF dr. R. Lapinskas

ISBN 978-609-459-133-4

Šiame leidinyje pateikiami uždaviniai, skirti ne matematikos specialybės aukštųjų mokyklų studentams, klausantiems tikimybių teorijos, atsitiktinių vyksmų, matematinės statistikos kursus. Uždaviniai parinkti bei jų skirstymas į skyrius yra atsižvelgiant į Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto studentams dėstomų „Atsitiktinių vyksmų“ bei „Tikimybių teorijos ir matematinės statistikos“ kursų turinį.

Kiekvieno skyriaus pradžioje bei Priede pateikiama teorijos santrauka, uždavinių sprendimo pavyzdžiai, formulės bei lentelės reikalingos uždavinių sprendimui. Išsami tikimybių teorijos, atsitiktinių vyksmų ir matematinės statistikos teorija pateikta mokymo knygelėse:

V. Palenskis, K. Maknys, Atsitiktiniai vyksmai (Mokymo knygelė), Vilnius, 2008 (http://rfk.ff.vu.lt/doc/av.pdf).

V. Palenskis, Tikimybių teorija ir matematinė statistika (Mokymo knygelė), Vilnius, 2009 (http://rfk.ff.vu.lt/doc/tikimybiu_teorija.pdf).

Taip pat rekomneduojame naudoti šiuos vadovėlius:

A. Aksomaitis, Tikimybių teorija ir statistika (Kaunas, Technologija, 2000).

J. Kubilius, Tikimybių teorija ir matematinė statistika (Vilnius, VU leidykla, 1996).

Kai kurie dažniau vartojami žymenys ir santrumpos:

A, *B*, *C*, ... – įvykiai;
$\varnothing$ - tuščioji aibė, negalimasis įvykis;
Ω - visa elementariųjų įvykių erdvė, būtinasis įvykis;
X, *Y*, *Z*, ... – atsitiktiniai dydžiai;
a. d. – atsitiktinis dydis;
C, c – konstanta;
P – tikimybė;
F – a. d.(integralinė) pasiskirstymo funkcija;
w – a. d. tikimybės tankis;
$M(x)$, m_x - a. d. *X* vidurkis;
$D(x)$, σ_x^2 - a. d. *X* dispersija;
Θ - a. d. charakteristinė funkcija;
Ψ - a. d. generuojančioji funkcija;
H – entropija;
k – koreliacijos funkcija;
S_i – *i*-toji imties vertė;
n_i – *i*-tosios imties vertės kartojimosi dažnis;
ν_i – *i*-tosios imties vertės santykinis dažnis.

TURINYS

1. ATSITIKTINIAI ĮVYKIAI

$A, B, C, D, \ldots$ – atsitiktiniai įvykiai.

Būtinasis įvykis Ω; negalimasis įvykis $\varnothing$.

<u>*A* yra įvykio *B* dalis</u>: $A \subset B$ arba $B \supset A$.

Savybės: $\varnothing \subset A \subset \Omega$; $A \subset A$;
jei $A \subset B$ ir $B \subset C$, tai $A \subset C$.

<u>Įvykių ekvivalentumas</u>: jei $A \subset B$ ir $B \subset A$, tai $A = B$.

Savybės: $A = A$;
jei $A = B$, tai $B = A$;
jei $A = B$ ir $B = C$, tai $A = C$.

<u>Įvykių *A* ir *B* sąjunga</u>: $A \cup B$.

Sąjungos savybės: $A \cup B = B \cup A$;
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
jei $A \subset B$, tai $A \cup B = B$.

<u>Įvykių *A* ir *B* sankirta</u>: $A \cap B$.

Sankirtos savybės: $A \cap B = B \cap A$;
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
jei $A \subset B$, tai $A \cap B = A$;
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

<u>Nesutaikomieji įvykiai</u>: $A \cap B = \varnothing$.

<u>Įvykių skirtumas</u>: $A \setminus B$.

Atimties savybės: $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{B}$;
jei $A \subset B$, tai $A \setminus B = \varnothing$;
$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;
$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

<u>Įvykiui *A* priešingas įvykis</u>: $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Savybės: $\left(\overline{\overline{A}}\right) = A$;
$A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$;

Morgano (Augustus De Morgan) sąryšiai:

$$\overline{\left(\bigcup_{\lambda} A_\lambda\right)} = \bigcap_{\lambda} \overline{A_\lambda},$$

$$\overline{\left(\bigcap_{\lambda} A_\lambda\right)} = \bigcup_{\lambda} \overline{A_\lambda}.$$

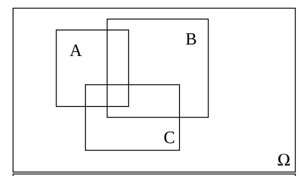
Pavyzdžiai:

---

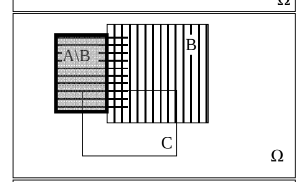
1. Nubrėžkite įvykio $(A \setminus B) \cup C$ Veno (John Venn) diagramą.

Sprendimas:

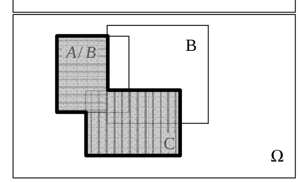
Pavaizduojame įvykių erdvę Ω ir įvykius *A*, *B* ir *C*:



įvykių *A* ir *B* skirtumas:



įvykių *A* ir *B* skirtumo sąjunga su įvykiu *C*:

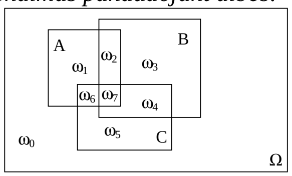


2. Supaprastinkite išraišką $(A\setminus C)\cap(B\setminus\overline{C})$.

Sprendimas panaudojant veiksmus su įvykiais:

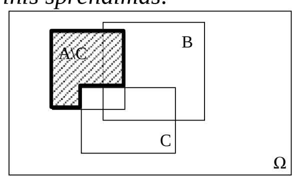
$$(A\setminus C)\cap(B\setminus\overline{C})=(A\cap\overline{C})\cap(B\cap C)$$
$$=A\cap B\cap C\cap\overline{C}=A\cap B\cap\varnothing=\varnothing.$$

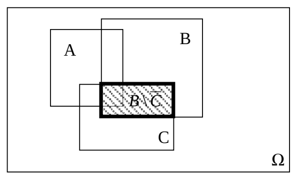
Sprendimas panaudojant aibes:



$A=\{\omega_1, \omega_2, \omega_6, \omega_7\}$,
$B=\{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_7\}$,
$C=\{\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$,
$\overline{C}=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$,
$A\setminus C=\{\omega_1, \omega_2\}$, $B\setminus\overline{C}=\{\omega_4, \omega_7\}$,
$(A\setminus C)\cap(B\setminus\overline{C})=\varnothing$.

Grafinis sprendimas:





Užbrūkšniuoti plotai nepersikloja, taigi bendrų įvykių nėra.

Uždaviniai:

1.1 Nubrėžkite šių įvykių Veno (John Venn) diagramas:
a) $A\cap B\cap C$; b) $A\cap\overline{B}\cap C$; c) $A\cup B\cup C$; d) $A\cup\overline{B}\cup C$.

1.2 Patikrinkite (grafiškai) ar teisingos išraiškos:
a) $A\setminus B=A\cap\overline{B}$; b) $A\setminus\overline{B}=A\cap B$;
c) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; d) jei $A\subset B$, tai $\overline{A}\supset\overline{B}$;
e) $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=A\cup B$; f) $\overline{\overline{A}\setminus\overline{B}}=A\setminus B$;
g) $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)=(A\cup B)\setminus B$; h) $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=A\cap B$;
i) $(A\cup B)\setminus C=A\cup(B\setminus C)$; j) $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$;
k) $(A\setminus B)\cup C=(A\cup C)\setminus(B\cup C)$; l) $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$;
m) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

1.3 Kada a) $A\cap B=A$; b) $A\cup B=A$?

1.4 Įvykis A yra įvykio B dalis. Kam lygi jų a) sąjunga; b) sankirta?

1.5 Kada a) $A\cap B\cap C=A$, b) $A\cup B\cup C=A$?

1.6 Ar įvykiai A ir $\overline{A\cup B}$ yra sutaikomi? Pagrįskite savo išvadą.

1.7 Užrašykite įvykį $A\setminus\overline{B}$ dviem kitais būdais.

1.8 Moneta metama tris kartus (i=1, 2, 3). Įvykis A_i – atvirto skaičius, įvykis B_i – atvirto herbas. Aprašykite įvykį C, kad atvirto ne mažiau kaip du herbai.

1.9 Metamas vienas lošimo kauliukas. Įvykis A – atvirto lyginis akučių skaičius, įvykis B – atvirtusių akučių skaičius yra trijų kartotinis. Ką reiškia įvykis $A\cap B$?

1.10 Taikinys susideda iš dešimties koncentrinių apskritimų, kurių spinduliai $r_1<r_2<\ldots<r_{10}$. Įvykis A_i – pataikymas į r_i spindulio apskritimą. Ką reiškia įvykiai:
a) $B=\bigcup_{i=1}^{6}A_i$; b) $C=\bigcap_{i=5}^{10}A_i$; c) $D=\overline{A_1}\cap A_2$;
d) $A=A_1\cup A_3\cup A_6$; e) $B=A_2\cap A_4\cap A_6\cap A_3$;
f) $C=(A_1\cup A_2)\cap A_6$; g) $D=A_3\setminus(A_1\cup A_2)$;
h) $E=A_3\setminus(A_1\cap A_2)$; i) $F=(A_1\cup A_3)\setminus A_2$?

1.11 Ant plokštumos atsitiktinai padedamas taškas. Įvykis A – taškas pakliuvo į apskritimą A, B - pakliuvo į apskritimą B. Kokia įvykių a) $\overline{A}$; b) $\overline{B}$; c) $A \bigcup B$; d) $\overline{A \bigcup B}$; e) $A \bigcap B$; f) $\overline{A \bigcap B}$ prasmė?

1.12 Studentas atsakinėja į du egzamino klausimus. Pažymime įvykius: *A* - atsakė teisingai į pirmą klausimą; *B* - atsakė teisingai į antrą klausimą. Aprašykite tokius įvykius: *C* - atsakė teisingai bent į vieną klausimą; *D* - atsakė teisingai tik į vieną klausimą; *E* - neatsakė nei į vieną klausimą.

1.13 Supaprastinkite išraiškas (panaudodami veiksmus su įvykiais, grafiškai, aibėmis):

a) $A \bigcup A \bigcap B$;

b) $(A \bigcup B) \bigcap \left(A \bigcup \overline{B}\right)$;

c) $(A \bigcup B) \bigcap \left(\overline{A} \bigcup B\right) \bigcap \left(A \bigcup \overline{B}\right)$;

d) $\left(\overline{A} \bigcap B\right) \bigcup \left(\overline{A} \bigcap \overline{B}\right)$;

e) $(A \setminus C) \bigcap \left(B \setminus \overline{C}\right)$;

f) $\left(A \setminus \overline{C}\right) \bigcap \left(C \setminus \overline{B}\right) \bigcup \left(B \setminus \overline{A}\right)$.

1.14 *A*, *B* ir *C* yra įvykiai. Užrašykite tokius įvykius:

a) įvyko tik įvykis *A* (*B* ir *C* neįvyko);
b) įvyko *A* ir *B*, bet neįvyko *C*;
c) įvyko visi trys įvykiai;
d) įvyko bent vienas įvykis;
e) įvyko bent du įvykiai;
f) neįvyko nei vienas įvykis;
g) įvyko tik vienas kuris nors įvykis;
h) įvyko ne daugiau kaip du įvykiai.

2. ATSITIKTINIŲ ĮVYKIŲ TIKIMYBĖS

Klasikinė tikimybės apibrėžtis remiasi vienodo galimumo sąvoka: $P(A)=\dfrac{m}{n}$;
čia n yra visų vienodai galimų įvykių skaičius,
m – įvykiui A palankių įvykių skaičius.

Dažninė tikimybės apibrėžtis: skaičius, prie kurio artėja įvykio statistinis dažnis, didinant bandymų skaičių, vadinamas įvykio tikimybe arba statistine tikimybe: $P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{m_n(A)}{n}$.

Geometrinė tikimybės apibrėžtis: atsitiktinio įvykio tikimybė lygi palankaus įvykiui įvykti apibendrintojo tūrio santykiui su visu nagrinėjamuoju apibendrintuoju tūriu (vienmačiu atveju apibendrintasis tūris yra ilgis, dvimačiu – plotas ir t. t.).

Aksiominė tikimybės apibrėžtis: Tikimybe vadiname skaitinę funkciją P, tenkinančią aksiomas:
1. Funkcija P yra neneigiama: $P(A)\geq 0$;
2. Būtinojo įvykio tikimybė lygi vienetui: $P(\Omega)=1$;
3. Funkcija P yra adityvi: jei įvykiai A_1, A_2, … yra nesutaikomi, tai $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(A_k)$.

Tikimybių savybės:
1) $P(A)\geq 0$;
2) $P(\varnothing)=0$;
3) $P(\Omega)=1$;
4) jei įvykiai A_1, A_2, …, A_n yra nesutaikomi, tai $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}P(A_k)$;
5) $P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)$;
6) $P(\overline{A})=1-P(A)$;
7) $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k\right)$
$$=\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}\sum_{1\leq k_1<k_2<\ldots<k_m<n}P\left(A_{k_1}\cap A_{k_2}\cap\ldots\cap A_{k_m}\right);$$
kai n=2: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$,
kai n=3:
$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)$$
$$-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C).$$

Sąlyginė tikimybė: $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Įvykių sankirtos teorema: $P(A\cap B)=P(A)P(B\mid A)$.

Jei įvykiai nepriklausomi, tai $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. Taip pat:
$$P\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-P(A_k)\right);$$
$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=1-\prod_{k=1}^{n}\left(1-P(A_k)\right).$$

Jei įvykiai B_1, …, B_n yra nesutaikomi ir sudaro elementariųjų įvykių erdvės Ω skaidinį, tai bet kurio įvykio

A tikimybę galima apskaičiuoti taip (pilnutinės tikimybės formulė):

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \mid B_k)P(B_k).$$

Jei įvykiai B_1, …, B_n yra nesutaikomi ir sudaro elementariųjų įvykių erdvės Ω skaidinį, tai (Bejeso (Thomas Bayes) formulė)

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \mid B_j)P(B_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(A \mid B_k)P(B_k)}.$$

Bernulio (Jacob Bernoulli) formulė (tikimybė, kad atlikus n nepriklausomų bandymų nagrinėjamasis įvykis įvyks k kartų):

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k};$$

p – nagrinėjamojo įvykio tikimybė, q = 1-p – jam priešingo įvykio tikimybė.

Kombinatorikos formulės:

Gretinių skaičius su pasikartojimais iš n elementų po m elementų:

$$B_n^m = n^m.$$

Gretinių skaičius be pasikartojimų iš n elementų po m elementų:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Kėlinių skaičius be pasikartojimų iš n elementų:

$$P_k = n!.$$

Kėlinių skaičius su pasikartojimais iš n elementų, kai pirmasis elementas pasikartoja m_1 kartų, antrasis - m_2 kartus, ..., k-tasis elementas pasikartoja m_k kartų:

$$P_k(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \ldots m_k!}.$$

Derinių skaičius be pasikartojimų iš n elementų po m elementų:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Derinių skaičius su pasikartojimais iš n elementų po m elementų:

$$D_n^m = C_{n+m-1}^{n-1} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Stirlingo formulė (James Stirling): $n! \approx \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Pavyzdžiai:

---

1. Metamas lošimo kauliukas. Raskite tikimybę, kad atvirtusių akučių skaičius dalijasi iš dviejų arba trijų.

Sprendimas:

Tikimybė, kad atvirs kuris nors vienas ar kitas akučių skaičius yra lygi 1/6 (remiantis vienodo galimumo sąvoka).

Atvirtusių akučių skaičius dalijasi iš dviejų (įvykis D), jei atvirs 2 (įvykis A), 4 (įvykis B) arba 6 (įvykis C) akutės; dalijasi iš trijų (įvykis F), jei atvirs 3 (įvykis E) arba 6 akutės (įvykis C).

Įvykiai A, B ir C yra nesutaikomi, t. y. negali įvykti kartu (taip pat ir įvykiai C ir E):

$$P(D) = P(A \cup B \cup C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2},$$

$$P(F) = P(C \cup E) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Įvykiai D ir F yra sutaikomi, todėl

$$P(\text{"dalijasi iš 2 arba 3"}) = P(D \cup F)$$

$$= P(D) + P(F) - P(D \cap F) = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

2. Turime korteles su raidėmis D, O, R, U ir U. Atsitiktinai traukiame korteles vieną po kitos ir negrąžiname. Raskite tikimybę, kad a) ištraukus dvi korteles ant abiejų bus užrašytos balsės; b) ištraukus dvi korteles ant pirmosios bus balsė, o ant antrosios priebalsė; c) traukdami korteles ir dėdami vieną šalia kitos sudėsime žodį RUDUO.

Sprendimas:

Įvykis A_i – i-tuoju traukimu ištraukėme balsę,
įvykis B_i – i-tuoju traukimu ištraukėme priebalsę.
Sudėtinių įvykių tikimybei apskaičiuoti naudojame įvykių sankirtos teorema:

a) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$;

b) $P(A_1 \cap B_2) = P(A_1)P(B_2 \mid A_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$;

c) $P(R_1 \cap U_2 \cap D_3 \cap U_4 \cap O_5)$

$$= P(R_1)P(U_2 \mid R_1)P(D_3 \mid R_1 \cap U_2)$$

$$\cdot P(U_4 \mid R_1 \cap U_2 \cap D_3)P(O_5 \mid R_1 \cap U_2 \cap D_3 \cap U_4)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{60}.$$

3. Prietaisą sudaro du nepriklausomai veikiantys mazgai. Pirmojo mazgo gedimo tikimybė yra 0,2, antrojo – 0,1. Prietaisas sugedo. Kokia tikimybė, kad sugedo tik pirmasis mazgas?

Sprendimas:

Įvykis A – sugedo tik pirmasis mazgas, įvykis B – sugedo tik antrasis mazgas, įvykis C – prietaisas sugedo;

Tikimybę, kad prietaisas sugedo, apskaičiuojame pagal pilnutinės tikimybės formulę:

$$P(C) = P(C \mid A \cap \overline{B})P(A \cap \overline{B}) + P(C \mid \overline{A} \cap B)P(\overline{A} \cap B)$$
$$+ P(C \mid A \cap B)P(A \cap B);$$

tačiau, sugedus bent vienam mazgui, prietaisas būtinai sugenda, taigi:

$$P(C \mid A \cap \overline{B}) = P(C \mid \overline{A} \cap B) = P(C \mid A \cap B)P(A \cap B) = 1;$$

tada

$$P(C) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B)$$
$$= P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) + P(A)P(B)$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}28;$$

Tikimybę, kad sugedo tik pirmasis mazgas, apskaičiuojame pagal Bejeso formulę:

$$P(A \mid C) = \frac{P(C \mid A \cap \overline{B})P(A \cap \overline{B})}{P(C)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}9}{0{,}28} = 0{,}64.$$

4. Trys šauliai šauna į taikinį; 2 kulkos į taikinį pataiko. Kokia tikimybė, kad pataikė pirmasis, jei šaulių pataikymo tikimybės: p_1=0,4, p_2=0,3, p_3=0,5.

Sprendimas:

Pažymime įvykius A_i – i-tasis šaulys pataikė į taikinį, B – pataikė 2 šauliai.
Apibrėžiame tokius įvykius:
Pataikė pirmasis ir antrasis šauliai: $A_{12} = A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}$,
pataikė pirmasis ir trečiasis šauliai $A_{13} = A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3$,
pataikė trečiasis ir antrasis šauliai $A_{23} = \overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3$.

Šių įvykių tikimybės:

$P(A_{12}) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}06$, $P(A_{13}) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}14$,

$P(A_{23}) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}009$.

Tada įvykis, kurio tikimybę reikia apskaičiuoti: $A_{12} \cup A_{13}$; taip pat $A_{12} \cup A_{13} = \overline{A_{23}}$. Apskaičiuosime priešingo įvykio $\overline{A_{23}}$ – pataikė antras ir trečias šauliai - tikimybę. Pagal Bejeso formulę:

$$P(A_{23} \mid B) = \frac{P(B \mid A_{23})P(A_{23})}{P(B \mid A_{12})P(A_{12}) + P(B \mid A_{13})P(A_{13}) + P(B \mid A_{23})P(A_{23})}$$

Akivaizdu, kad $P(B \mid A_{ij}) = 1$. Tada $P(A_{23} \mid B) = \frac{9}{29}$ ir $P(A_{12} \cup A_{13}) = 1 - \frac{9}{29} = \frac{20}{29}$.

Uždaviniai:

2.1 Dėžėje yra 3 balti ir 7 juodi rutuliai. Atsitiktinai vieną ištraukiame. Kokia tikimybė, kad jis bus a) baltas; b) juodas?

2.2 Yra 52 kortų kaladė. Atsitiktinai traukiame vieną kortą. Kokia tikimybė, kad: a) tai ne tūzas; b) ištrauktos kortos vertė bus žemesnė už septynakę?

2.3 Po krepšinio varžybų susumavus žaidėjo pataikymo rezultatus buvo gauta, kad jo pataikymo procentas – 60 %. Kiek kartų jis metė kamuolį, jeigu nepataikė į krepšį 12 kartų?

2.4 Iš žodžio "ATSITIKTINAI" atsitiktinai paimame vieną raidę. Kokia tikimybė, kad tai bus a) "R"; b) "T"; c) balsė?

2.5 Metamas kauliukas. Kokia tikimybė, kad atvirs a) keturios akutės; b) daugiau nei keturios akutės?

2.6 Metami 3 lošimo kauliukai. Kurio įvykio tikimybė didesnė: atvirtusių akučių suma lygi 9 ar atvirtusių akučių suma lygi 10?

2.7 Metami du kauliukai. Kokia tikimybė, kad a) atvirtusių akučių suma bus ne mažesnė nei 9; b) nors viename kauliuke atvirs "1"; c) atvirtusių akučių suma bus mažesnė nei 10; d) atvirto vienodas akučių skaičius; e) kauliuke, kurio akučių skaičius didesnis, atvirto nemažiau kaip 5 akutės; f) atvirto didžiausią tikimybę turinti akučių suma?

2.8 Po audros tarp 40-ojo ir 70-ojo kilometrų nutrūko elektros linija. Kokia tikimybė, kad trūkis įvyko tarp 50-ojo ir 55-ojo kilometrų?

2.9 Du draugai susitarė susitikti tarp 12.00 val. ir 13.00 val. ir laukti vienas kito ne ilgiau 15 min ir ne vėliau 13.00 val. Kokia tikimybė, kad susitikimas įvyks?

2.10 Į R spindulio apskritimą padėtos dvi r ($r \le \frac{1}{2}R$) spindulio monetos taip, kad viena kitos neužkloja. Į apskritimą atsitiktinai padedamas taškas. Kokia tikimybė, kad tas taškas pataikė ant vienos iš monetų?

2.11 Atkarpoje atsitiktinai pažymimas taškas. Kokia tikimybė, kad jo atstumas iki atkarpos vidurio bus didesnis už trečdalį atkarpos ilgio?

2.12 Atsitiktinai atkarpoje AB pažymimas taškas C. Raskite tikimybę, kad taško C atstumas iki taško A bus ne mažesnis už dvigubą atstumą iki taško B.

2.13 Ilgio l atkarpa atsitiktinai padalijama į tris dalis. Raskite tikimybę, kad iš šių trijų atkarpų galime sudėti trikampį.

2.14 Kvadrate atsitiktinai padedamas taškas. Kokia tikimybė, kad nuotolis iki visų kvadrato kraštinių bus nemažesnis nei pusė kvadrato kraštinės?

2.15 (Biufono (Buffon) uždavinys) Horizontalioje plokštumoje nubrėžta sistema lygiagrečių tiesių, tarp kurių atstumas lygus a. Ant tos plokštumos atsitiktinai metama l ilgio adata ($l \le a$). Raskite tikimybę, kad adata kirs kurią nors tiesę.

2.16 Atkarpa padalinta į 5 lygias dalis. Joje atsitiktinai padedama 10 taškų. Kokia tikimybė, kad į pirmą atkarpos dalį pateko 2 taškai, į antrą – 3 taškai, į ketvirtą – 4 taškai, į penktą – 1 taškas?

2.17 Dėžėje yra 10 iš eilės (nuo 1 iki 10) sunumeruotų rutulių. Atsitiktinai vieną ištraukiame. Kokia tikimybė, kad jo numeris dalijasi iš dviejų arba trijų?

2.18 Du objektus jungia trys ryšio kanalai. Atskirai kiekvieno kanalo patikimumas yra p_1, bet kurių dviejų kanalų kartu p_2, trijų – p_3. Raskite tikimybę, kad nors vienas kanalas veiks.

2.19 Tarp studentų vykdoma apklausa. Viso apklausta 200 studentų: kokį laikraštį jie skaito? Gauti tokie apklausos rezultatai: 50 studentų skaito laikraštį A, 40 - B, 30 - C. Iš visų apklaustųjų kai kurie skaito po kelis laikraščius, t. y. pagal apklausos rezultatus: 10 - A ir B; 8 - B ir C; 6 - A ir C; 4 - A, B ir C. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai pasirinktas studentas: a) visai neskaito laikraščių; b) skaito lygiai du laikraščius?

2.20 Įvykio A tikimybė yra p. Atlikus 10 nepriklausomų bandymų, įvykis A įvyko vieną kartą. Kokia tikimybė, kad įvykis A įvyko atliekant antrąjį bandymą?

2.21 Sandėlyje yra 20 pirmos rūšies detalių, 6 – antros ir 4 – trečios rūšies. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paimtos dvi detalės yra skirtingų rūšių?

2.22 Metami 3 lošimo kauliukai. Raskite tikimybę, kad viename jų atvirs „1“, jei visų kauliukų atvirtusių akučių skaičius skirtingas.

2.23 Lošimo kauliukas metamas 5 kartus. Žinoma, kad vieną kartą atvirto „1“. Kokia tikimybė, kad „1“ atvirto daugiau nei vieną kartą?

2.24 Įrodykite, kad $P(A \mid B) \ge 1 - \dfrac{P(\overline{A})}{P(B)}$.

2.25 Atsitiktinai išrenkamos ir sudedamos į eilę šešios raidės iš žodžio KILOMETRAS. Raskite tikimybę, kad a) sudėsime žodį KELIAS; b) žodžio KILOMETRAS pradžią.

2.26 Berniukas žaidžia su penkiomis raidyno raidėmis: E, I, N, R, S. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai dėdamas jas į eilę, jis sudės žodį NERIS?

2.27 Turime korteles su raidėmis. Kokia tikimybė, kad, atsitiktinai traukiant korteles ir dedant jas iš eilės vieną šalia kitos, susidės žodis FIDI, jeigu traukiame: a) iš 4 kortelių su raidėmis D, F, I, I; b) iš 6 kortelių su raidėmis A, D, F, I, I, K; c) iš 7 kortelių su raidėmis D, F, F, F, I, I, I?

2.28 Dėžėje yra 6 rutuliai: 3 balti, 2 juodi ir 1 mėlynas. Iš jos atsitiktinai ištraukiami trys rutuliai. Apskaičiuokite tikimybę, kad a) ištraukti tik balti rutuliai; b) ištraukti du balti ir vienas juodas; c) ištraukti skirtingų spalvų rutuliai; d) ištrauktas nors vienas juodas rutulys; e) neištraukta nei vieno juodo rutulio.

2.29 Dėžėje yra 5 balti, 4 juodi ir 3 raudoni rutuliai. Ištraukėme vieną rutulį. Kokia tikimybė, kad po to ištrauksime a) raudoną rutulį, jeigu pirmasis buvo: baltas; raudonas? b) ne baltą rutulį, jeigu pirmasis buvo: baltas; juodas?

2.30 Dėžėje yra 3 balti ir 7 juodi rutuliai. Atsitiktinai ištraukiame du rutulius. Kokia tikimybė, kad jie abu bus juodi?

2.31 Rinkdami telefono numerį pamiršome du paskutinius skaičius. Kokia tikimybė atspėti numerį iš pirmo karto, jei pamirštieji skaitmenys yra nelyginiai ir skirtingi?

2.32 Studentas žino atsakymus tik į 24 klausimus iš 30-ties. Kokia tikimybė jam išlaikyti egzaminą, jei atsisakius atsakinėti į pirmąjį pateiktą klausimą, dėstytojas užduoda dar vieną? Egzaminui išlaikyti užtenka atsakyti bent į vieną klausimą.

2.33 Iš n turimų raktų spynai tinka tik vienas. Kokia tikimybė rasti tinkamą raktą a) pirmuoju; b) antruoju; c) trečiuoju bandymu (kartą pabandžius netinkamas raktas atgal negrąžinamas)?

2.34 Iš 10 kortelių, sunumeruotų nuo 1 iki 10, atsitiktinai ištraukiame vieną. Kokia tikimybė, kad bus užrašytas a) nelyginis skaičius; b) pirminis; c) nelyginis pirminis skaičius?

2.35 Ryšio kanalu siunčiami vienas iš trijų signalų užkoduotų raidėmis AAAA, BBBB, CCCC. Šių signalų išsiuntimo tikimybės atitinkamai yra p_1, p_2 ir p_3. Bet kuri iš keturių siunčiamų raidžių priimama teisingai su tikimybe α (tada tikimybė, kad ji bus pakeista kuria nors kita raide yra $(1-\alpha)/2$). Raidės priėmimas iškraipomas nepriklausomai nuo raidės. Raskite tikimybę, kad buvo išsiųstas signalas AAAA, jei priimtas ABCA.

2.36 Siunčiami signalai. Tikimybė, kad tarp jų bus signalas A yra 0,84, o signalas B – 0,16. Dėl triukšmo ir iškraipymų, 1/6 dalis išsiųstų A signalų imtuve priimami kaip B signalai, o 1/8 dalis išsiųstų B signalų imtuve priimami kaip A signalai. Raskite tikimybę, kad: a) imtuve bus užfiksuotas A signalas; b) imtuve bus užfiksuotas B signalas; c) siųstuve iš tiesų buvo išsiųstas signalas A, jeigu imtuve užfiksuotas signalas A.

2.37 Raitelis prijoja kryžkelę su rodyklėmis: “Josi į kairę – žus arklys”, “Josi į dešinę –žūsi pats ”, “Josi tiesiai – arba pats žūsi, arba arklys žus, arba abu liksite gyvi”. Be to, yra žinoma, kad 40 atvejų iš 100 žmogus be arklio tęsdamas kelionę žūva. Kuriuo keliu jojant didžiausia tikimybė išlikti gyvam?

2.38 Į r spindulio apskritimą įbrėžtas kvadratas. Atsitiktinai į apskritimą padedami du taškai. Kokia tikimybė, kad abu taškai pateks į kvadratą?

2.39 Metamos trys monetos. Kokia tikimybė, kad atvirs: a) lygiai du herbai; b) ne daugiau kaip du herbai?

2.40 Metama moneta ir kauliukas. Kokia tikimybė, kad atvirs herbas ir lyginis akučių skaičius?

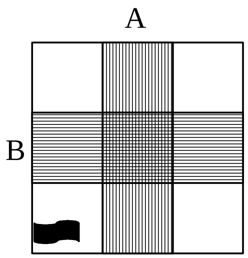
2.41 Įvykiai A ir B yra nepriklausomi. Įrodykite, kad nepriklausomi yra ir įvykiai a) A ir $\overline{B}$; b) $\overline{A}$ ir B; c) $\overline{A}$ ir $\overline{B}$.

2.42 Įvykiai A ir B_1 yra nepriklausomi, o taip pat ir įvykiai A ir B_2. Be to, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. Įrodykite, kad įvykiai A ir $B_1 \cup B_2$ taip pat nepriklausomi.

2.43 Nustatykite, ar įvykiai A ir B yra priklausomi: a) metama moneta ir kauliukas: įvykis A – atvirto herbas, B – atvirto lyginis akučių skaičius; b) paeiliui metamos trys monetos: įvykis A – pirmoje monetoje atvirto herbas, B – nors vienoje monetoje atvirto skaičius.

2.44 Dėžėje yra keturi rutuliai pažymėti skaičiais 000, 011, 101, 110. Atsitiktinai ištraukiamas vienas rutulys. Tegu įvykis A_k reiškia, kad k-tasis skaitmuo yra vienetas. Nustatykite, ar įvykiai A_1, A_2 ir A_3 yra priklausomi. Apskaičiuokite tikimybes $P\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right)$ ir $P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right)$.

2.45 Kvadrate atsitiktinai pažymimas taškas. Įvykiai *A* ir *B* reiškia, kad taškas pateko į atitinkamas stačiakampes užbrūkšniuotas juostas. Nustatykite, ar įvykiai *A* ir *B* yra priklausomi. Ar jie bus priklausomi, jei iš kvadrato iškirpsime mažą jo dalį (juodą figūrą)?



2.46 Metamos 2 monetos. Apibrėžti tokie įvykiai: *A* – pirmoji moneta atvirto herbu, *B* – nors viena moneta atvirto skaičiumi, *C* – nors viena moneta atvirto herbu, *D* – antroji moneta atvirto herbu. Nustatykite, ar priklausomi yra šie įvykiai: *A* ir *B*, *A* ir *D*, *B* ir *C*, *C* ir *D*.

2.47 Tiriamas sutuoktinių nuo 18 iki 30 metų amžius. Kokia tikimybė, kad žmona yra ne vyresnė kaip 20 metų, o vyras jaunesnis nei 25 metai?

2.48 Trys šauliai šauna į taikinį. Pirmojo pataikymo tikimybė 0,75, antrojo 0,8. Raskite trečiojo šaulio pataikymo tikimybę, jei tikimybė, kad bent vienas šaulys pataiko į taikinį yra 0,995 (šauliai į taikinį pataiko nepriklausomai vienas nuo kito). Kokia tikimybė, kad a) visi šauliai pataikys į taikinį; b) tik vienas šaulys pataikys į taikinį; c) bent vienas šūvis bus taiklus, jei visi šauliai šaus po du kartus?

2.49 Į devynaukščio pastato liftą pirmame aukšte nesusitarę įlipo trys žmonės. Kokia tikimybė, kad jie išlips: a) visi ketvirtame aukšte; b) visi tame pačiame aukšte; c) visi išlips skirtinguose aukštuose; d) tik vienas išlips ketvirtame aukšte; e) bent vienas išlips ketvirtame aukšte; f) visi išlips trečiame ir ketvirtame aukštuose; g) visi išlips ne žemiau kaip šeštame aukšte; h) visi išlips skirtinguose aukštuose, bet ne žemiau kaip penktame; i) vienas išlips žemiau penkto aukšto, o kiti aukščiau; j) vienas

išlips ketvirtame aukšte, o kiti aukščiau; k) du išlips ketvirtame aukšte; l) bent vienas išlips nežemiau penkto aukšto?

2.50 Kauliukas metamas *n* kartų. Kokia tikimybė, kad a) nors vieną kartą atvirs 6 akutės; b) vieną kartą atvirs 6 akutės; c) atvirtusių akučių suma bus didesnė už 6*n*-1?

2.51 Du šauliai šauna į taikinį. Pirmojo pataikymo tikimybė 0,7, antrojo 0,8. Raskite tikimybę, kad į taikinį bus pataikyta.

2.52 Vienoje dėžėje yra 10 juodų ir 5 balti rutuliai, kitoje – 5 juodi ir 10 baltų. Iš kiekvienos dėžės išimame po vieną rutulį. Raskite tikimybę, kad bus išimtas nors vienas baltas rutulys.

2.53 Šaulio pataikymo tikimybė visada yra 2/3. Kokia tikimybė, kad šaudamas 3 kartus, į taikinį jis pataikys lygiai vieną kartą?

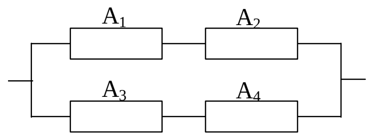
2.54 2 šauliai vienas po kito šauna į taikinį. Kiekvienas jų turi po 4 šovinius, o kiekvieno jų pataikymo tikimybė yra 0,3. Pirmasis pataikęs į taikinį gauna prizą. Kokia tikimybė, kad pirmasis šaulys gaus prizą? Kokia tikimybė, kad kuris nors iš šaulių gaus prizą?

2.55 Trys šauliai šauna į taikinį; 2 kulkos pataiko. Kokia tikimybė, kad pataikė pirmasis šaulys? Šaulių pataikymo tikimybės yra 0,4, 0,3 ir 0,5, atitinkamai.

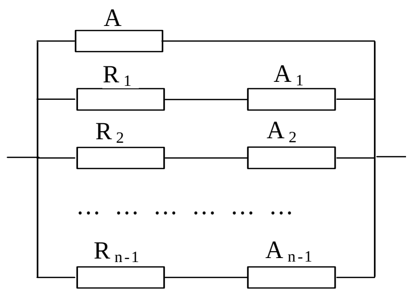
2.56 Simetriška moneta metama 3 kartus. Raskite tikimybę, kad a) metant antrą kartą atvirto herbas; b) metant trečią kartą atvirto ne herbas; c) nors vieną kartą atvirto herbas.

2.57 Tarp studentų vykdoma apklausa. Viso apklausta 200 studentų: kokį laikraštį jie skaito? Gauti tokie apklausos rezultatai: 50 studentų skaito laikraštį A, 40 - B, 30 - C. Studentų atsakymai nepriklausomi. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai pasirinktas studentas: a) visai neskaito laikraščių; b) skaito lygiai du laikraščius. Palyginkite gautus rezultatus su 2.19 užduoties rezultatais. Ar 2.19 užduotyje pateiktos apklausos rezultatus galima laikyti nepriklausomais?

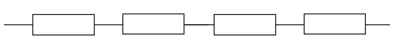
2.58 Blokas sudarytas iš keturių nepriklausomai veikiančių elementų. Blokas veikia, kai veikia visi nuosekliai sujungti elementai ir bent viena lygiagreti šaka. Apskaičiuokite a) bloko patikimumą, kai kiekvieno elemento patikimumas yra 0,9; b) elementų patikimumą, kai prognozuojamas bloko patikimumas 0,99.



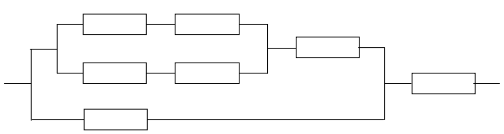
2.59 Norint padidinti sistemos patikimumą, prietaisas A, kurio patikimumas p, dubliuojamas n-1 kartų. Kiekvienas dubliuojantis prietaisas įjungiamas raktu R, kurio patikimumas p_1. Raktai ir prietaisai A_i funkcionuoja nepriklausomai. Apskaičiuokite sistemos patikimumą.



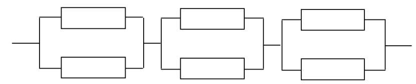
2.60 Elektros grandinė sudaryta iš nepriklausomai veikiančių elementų, kurių kiekvieno patikimumas yra p. Grandinė veikia, kai veikia visi nuosekliai sujungti elementai ir bent viena lygiagreti šaka. Apskaičiuokite visos sistemos patikimumą.

a) 

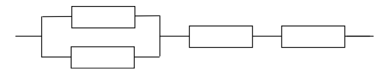
b)



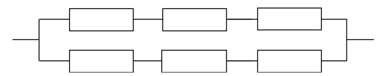
c)



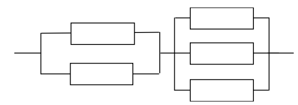
d)



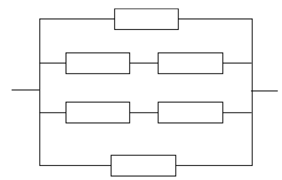
e)



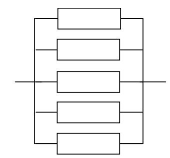
f)



g)

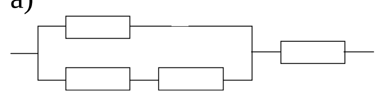


h)

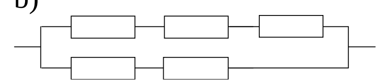


2.61 Kuri iš šių grandinių yra patikimesnė, jei visi jų elementai vienodai patikimi ir veikia nepriklausomai?

a)



b)



2.62 Tikimybė, kad abu dvyniai bus tos pačios lyties yra 0,64, o tikimybė, kad gims berniukas – 0,51. Raskite tikimybę, kad gimę dvyniai yra berniukai

2.63 Ryšio kanalu nepriklausomai siunčiami trys signalai. Kiekvieno jų priėmimo tikimybės yra p_1, p_2 ir p_3. Raskite tikimybę, kad a) bus priimti visi signalai; b) bus priimtas nors vienas signalas; c) bus priimtas vienas signalas; d) nors vienas signalas bus nepriimtas; e) nepriimti lygiai du signalai; f) nepriimtas pirmasis ir trečiasis signalai.

2.64 Tikimybė, kad prietaisas suges per laiko tarpą T yra 0,05. Kokia tikimybė, kad prietaisas nesuges per laiko tarpą $3T$?

2.65 Tikimybė, kad laiko momentu t=0 molekulė susidūrusi su kita molekule per laiko tarpą nuo t iki $t+\Delta t$ nesusidurs su kita molekule lygi $\lambda\Delta t + o[\Delta t]$. Raskite tikimybę, kad laisvo lėkio trukmė (tarp susidūrimų su kita molekule) bus ilgesnė nei T.

2.66 Tikimybė, kad užsimaskavęs priešininkas yra apšaudomoje teritorijoje yra 0,3, o pataikymo į jį vienu sviediniu tikimybė yra 0,2. Priešininkui sunaikinti užtenka vieno sviedinio. Kokia tikimybė, kad priešininkas bus sunaikintas a) dviem šūviais; b) 10-čia šūvių?

2.67 Pirmame kurse yra trys grupės. Antroje grupėje yra tris kartus, o trečioje du kartus daugiau studentų nei pirmoje. 6 % pirmos grupės studentų, 10 % antros ir 12 % trečios neišlaikė matematikos egzamino. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai sutiktas pirmojo kurso studentas neišlaikė matematikos egzamino?

2.68 Iš dėžės, kurioje yra m baltų ir n juodų rutulių, vienas rutulys dingo. Po to traukiamas dar vienas rutulys. Kokia tikimybė, kad jis bus baltas?

2.69 Turime dvi vienodas dėžes. Vienoje yra 2 balti ir 1 juodas rutuliai, kitoje – 1 baltas ir 4 juodi rutuliai. Atsitiktinai pasirenkame vieną dėžę ir iš jos ištraukiame vieną rutulį. Kokia tikimybė, kad ištrauksime baltą rutulį?

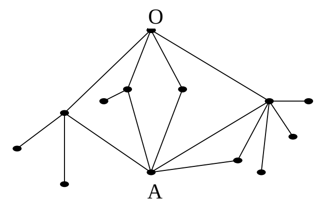
2.70 Pirmojoje dėžėje yra 3 balti ir 2 juodi rutuliai, antrojoje – 4 balti ir 4 juodi. Du nežinomi rutuliai iš pirmosios dėžės perdedami į antrąją. Iš antros dėžės traukiamas rutulys. Kokia tikimybė, kad jis bus baltas?

2.71 Metami du lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad pirmajame atvirto „1“, jei antrajame atvirto didesnis akučių skaičius nei pirmajame?

2.72 Perpilant kraują būtina atsižvelgti į donoro ir ligonio kraujo grupes. Žmogui, turinčiam ketvirtą kraujo grupę, galima perpilti bet kurios grupės kraują; antrą ir trečią grupę turintiems žmonėms galima perpilti tos pačios ir pirmos grupės kraują; o pirmą kraujo grupę turintiem žmonėm – tik pirmos grupės kraują. 33,7% žmonių kraujo grupė yra pirma, 37,5% – antra, 20,9% – trečia, 7,9% – ketvirta. Kokia tikimybė, kad atsitiktiniam ligoniui galima perpilti atsitiktinio donoro kraują?

2.73 Detalę galima pagaminti bet kuriomis iš 10-ties A kategorijos, 6-ių B arba 4-ių C kategorijos staklių. Tikimybė, kad detalė bus kokybiška gaminant ją A kategorijos staklėmis yra 0,9, B – 0,8, C – 0,7. Kokia tikimybė, kad vienomis atsitiktinai parinktomis staklėmis pagaminta detalė bus kokybiška?

2.74 Kokia tikimybė, kad iš taško O išėjęs turistas pasieks tašką A, jei kiekvienoje kryžkelėje kelią jis pasirenka atsitiktinai?



2.75 Iki turnyro pabaigos komandai reikia sužaisti dvejas rungtynes. Norint laimėti turnyrą reikia surinkti du taškus (už pergalę skiriami 2 taškai, už lygiąsias – 1, už pralaimėjimą - 0). Kokia tikimybė komandai laimėti turnyrą, jei visų rungtynių baigtys yra vienodai tikėtinos?

2.76 Vilniuje ir Londone tuo pačiu metu vyksta teniso turnyrai. Tikimybė žaidėjui laimėti turnyrą Londone yra 0,6, o turnyrą Vilniuje - 0,9. Kokia tikimybė šiam žaidėjui tapti nugalėtoju (kuriame turnyre dalyvauti žaidėjas pasirenka atsitiktinai)?

2.77 5% vyrų ir 0,25% moterų yra daltonikai. Atsitiktinai parinktas asmuo yra daltonikas (tegu vyrų ir moterų yra po lygiai). Kokia tikimybė, kad jis yra vyras?

2.78 90 % gamyklos gaminių yra standartiniai. Kontrolės sistema standartiniu pripažįsta gaminį su tikimybe 0,95, jei šis iš tiesų yra standartinis, ir su tikimybe 0,15, jei gaminys nestandartinis. Kokia tikimybė, kad kontrolės priimtas gaminys iš tikrųjų yra standartinis?

2.79 Keliu pro degalinę pravažiuoja 60 % lengvųjų automobilių, 10 % autobusų ir 30 % sunkvežimių. Tikimybė, kad lengvasis automobilis užvažiuos į degalinę yra 0,3, autobusas – 0,1, sunkvežimis – 0,2. a) Kokia tikimybė, kad atsitiktinai pro degalinę važiuojanti transporto priemonė užvažiuos į ją? b) Kokia tikimybė, kad užvažiavusi transporto priemonė bus lengvasis automobilis?

2.80 Iš dvidešimties studentų grupės 6 egzaminui yra pasiruošę labai gerai ir gali atsakyti į visus 20 klausimų, 8 pasiruošę gerai ir žino 16 klausimų, 4 vidutiniškai – 10 klausimų ir 2 blogai – 5 klausimus. Atsitiktinai pakviestas studentas atsakė į visus tris jam pateiktus klausimus. Raskite tikimybę, kad šis studentas buvo pasiruošęs a) labai gerai; b) gerai; c) vidutiniškai; d) blogai.

2.81 Jei žmogus serga tuberkulioze, tai tikimybė ją diagnozuoti šviečiant rentgenu yra 0,98. Tikimybė sveiką žmogų palaikyti ligoniu yra 0,02. Tarkime, kad tuberkulioze serga 1 % gyventojų. Kokia tikimybė, kad žmogus sveikas, jei tyrimo metu jis buvo pripažintas ligoniu?

2.82 Du šauliai nepriklausomai vienas nuo kito šauna į taikinį po vieną šūvį. Pirmojo šaulio pataikymo tikimybė 0,8, antrojo – 0,4. Į taikinį pataikė vienas šaulys. Kokia tikimybė, kad pataikė pirmasis šaulys?

2.83 25 % detalių pagaminama pirmosiomis staklėmis, 35 % - antrosiomis, 40 % - trečiosiomis. Šiomis staklėmis pagamintuose gaminiuose atitinkamai būna 5 %, 4 %, ir 2 % broko. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai parinkta detalė bus brokuota? Jei atsitiktinai parinkta detalė brokuota, tai, kokia tikimybė, kad ji buvo pagaminta a) pirmosiomis; b) antrosiomis; c) trečiosiomis staklėmis?

2.84 Metame 11 kauliukų. Raskite tikimybę, kad ant visų kauliukų atsivertė vienodas akučių skaičius.

2.85 Dėžėje yra 10 raudonų ir 6 mėlyni rutuliai. Ištraukiami du rutuliai. Kokia tikimybė, kad jie bus vienodos spalvos?

2.86 Vienoje dėžėje yra 12 raudonų, 8 žali ir 10 mėlynų rutulių. Atsitiktinai ištraukiami du rutuliai. Kokia tikimybė, kad jie skirtingų spalvų, jei žinoma, kad mėlynas rutulys neištrauktas?

2.87 Tarp 25 egzamino bilietų yra 5 “geri”. Du studentai iš eilės ima po vieną bilietą. Kokia tikimybė, kad a) pirmas studentas paėmė “gerą” bilietą; b) antras studentas paėmė “gerą” bilietą (pirmasis - “blogą”); c) abu studentai paėmė “gerus” bilietus?

2.88 Partijoje yra n gaminių, tarp jų – m blogų. Kokia tikimybė, kad iš partijos atsitiktinai parinkus r ($r \le n$) gaminių, tarp jų bus s ($s \le r$) blogų?

2.89 Iš dėžės, kurioje yra 5 geri ir 2 sugedę tranzistoriai, atsitiktinai išimami du. Raskite tikimybę, kad a) abu išimti tranzistoriai bus sugedę; b) nors vienas bus sugedęs; c) vienas bus sugedęs, o kitas - geras.

2.90 Iš 100 gaminių partijos tikrinimui atsitiktinai paimama 10 gaminių. Radus tarp jų bent vieną defektingą gaminį, nepriimama visa partija. Raskite tikimybę, kad bus priimta partija, kurioje yra 10 defektingų gaminių.

2.91 Loterijoje yra 100 bilietų ir 25 laimėjimai. Kokia tikimybė, kad, perkant 3 bilietus, bent vienas iš jų bus laimingas?

2.92 Studentas atėjo į egzaminą žinodamas tik 20 klausimų iš 25. Kokia tikimybė, kad studentas atsakys a) į visus tris dėstytojo pateiktus klausimus; b) tik į du iš trijų klausimų?

2.93 Raskite tikimybę, kad a) 12-os žmonių gimtadieniai bus skirtingais metų mėnesiais; b) 6-ių žmonių gimtadieniai bus skirtingais metų mėnesiais; c) 6-ių žmonių gimtadieniai bus skirtingais lyginiais metų mėnesiais. Laikykite, kad visi mėnesiai turi vienodą dienų skaičių.

2.94 Spynoje yra 5 diskai, ant kiekvieno jų visi iš 10 skaitmenų. Kokia tikimybė atrakinti spyną atsitiktinai parinkus diskų padėtis?

2.95 52 kortų malka atsitiktinai padalinama į 5 dalis. Kokia tikimybė, kad vienoje dalyje bus 2 kortos, antroje – 5, trečioje – 10, ketvirtoje – 15, penktoje – likusios 20 kortų?

2.96 20 žaidėjų burtų keliu suskirstomi į du porgupius po 10 žaidėjų. Apskaičiuokite tikimybę, kad a) 2 stipriausi žaidėjai pateks į skirtingus pogrupius; b) 4 stipriausi žaidėjai pateks į vieną pogrupį; c) 4 stipriausi žaidėjai po 2 pateks į skirtingus pogrupius.

2.97 Tvenkinyje gyvena 50 veidrodinių karpių ir 60 sezanų. Žvejys gaudo žuvis. Kokia tikimybė, kad 10 pirmų žuvų bus veidrodiniai karpiai, o 11-ta – sezanas?

2.98 Tvenkinyje plaukioja 10 karpių. 4 iš jų buvo sugauti, pažymėti ir paleisti atgal. Antrą kartą sugauti 7 karpiai. Raskite tikimybę, kad a) tarp sugautųjų yra 3 pažymėti karpiai; b) sugautas nors vienas pažymėtas karpis; c) visi sugauti karpiai yra nepažymėti; d) sugauti visi nepažymėtieji karpiai.

2.99 Dėžėje yra 20 teniso kamuoliukų, iš kurių 12 yra nauji. Žaidėjas atsitiktinai žaidimui paima 2 kamuoliukus ir po žaidimo grąžina juos atgal. Po to vėl atsitiktinai paima du kamuoliukus. Raskite tikimybę, kad jie abu bus nauji.

2.100 Iš dėžės, kurioje yra $2n$ baltų ir $2n$ juodų rutulių, atsitiktinai ištraukiama $2n$ rutulių. Kokia tikimybė, kad imtyje bus vienodas skaičius juodų ir baltų rutulių.

2.101 Lagamino spynelėje yra 4 diskai po 3 skaitmenis kiekviename. Kokia tikimybė atidaryti spyną: a) iš pirmo karto; b) per 3 bandymus (kai bloga kombinacija nekartojama). Kokios spynos atidarymo tikimybė mažesnė - kai yra trys diskai po 2 skaitmenis, ar 2 diskai po 3 skaitmenis?

2.102 Dėžėje yra vienas baltas rutulys ir trys juodi. Atsitiktinai ištraukiami du rutuliai. Kas labiau tikėtina: ištraukti du juodus rutulius ar vieną baltą ir vieną juodą?

2.103 Kokia tikimybė, kad, atsitiktinai iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5 sudarius penkiaženklį skaičių, kurio visi skaitmenys skirtingi, jis dalinsis iš 5?

2.104 Telefono numeris sudarytas iš 6 skaitmenų. Kokia tikimybė, kad a) visi jo skaitmenys skirtingi; b) numeris yra lyginis, o visi jo skaitmenys skirtingi; c) pirmieji penki skaitmenys yra skirtingi, o numeris lyginis; d) numeris dalijasi iš 5?

2.105 Dėžėje yra n rutulių sužymėtų skaičiais 1, 2, 3, …, n. Traukiam rutulius m kartų, pasižymime, kokį ištraukėme, ir grąžiname atgal. Jei imtyje nėra pasikartojančių rutulių, tai įvykio A tikimybė yra p_1, o jei nors vienas rutulys pasikartoja – įvykio A tikimybė yra p_2. Raskite įvykio A tikimybę.

2.106 Elementai a_1, a_2, …, a_n atsitiktinai perstatinėjami. Visi perstatymai yra vienodai galimi. Kokia tikimybė, kad atlikus perstatymą nors vienas elementas liks savo vietoje? Įvertinkite šią tikimybę, kai $n \to \infty$.

2.107 r rutulių atsitiktinai sumėtomi į n dėžių. Raskite tikimybę, kad pirmoje dėžėje bus r_1 rutulių, antroje – r_2, …, n-tojoje – r_n.

2.108 *n* žmonių susėda už apvalaus stalo. Kokia tikimybė, kad a) du tam tikri asmenys atsisės šalia; b) asmenys A ir B atsisės šalia, be to, asmuo B atsisės asmeniui A iš kairės; c) trys tam tikri asmenys atsisės šalia; d) asmenys A, B ir C atsisės šalia, be to, asmuo A atsisės asmeniui B iš kairės, o C iš dešinės?

2.109 *n* žmonių susėda iš vienos stačiakampio stalo pusės. Kokia tikimybė, kad a) du tam tikri asmenys atsisės šalia; b) asmenys A ir B atsisės šalia, be to, asmuo B atsisės asmeniui A iš kairės; c) trys tam tikri asmenys atsisės šalia; d) asmenys A, B ir C atsisės šalia, be to, asmuo A atsisės asmeniui B iš kairės, o C – iš dešinės?

2.110 Turime 10 knygų – 7 skirtingų autorių ir 3 vieno autoriaus. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai statydami knygas į lentyną 3 vieno autoriaus knygas padėsime greta?

2.111 Keturi matematikos ir trys fizikos vadovėliai atsitiktinai sustatomi į lentyną. Kokia tikimybė, kad kiekvieno dalyko vadovėliai stovės greta vienas kito?

2.112 Kokia tikimybė, kad 5 vyrai ir 5 moterys susės už apvalaus stalo taip, kad vienos lyties asmenys nesėdės greta?

2.113 Eilėje stovi 10 žmonių. Raskite tikimybę, kad du tam tikri asmenys bus atskirti trijų žmonių.

2.114 Spintoje yra 10 porų batų. Atsitiktinai paimame 4 batus. Kokia tikimybė, kad a) tarp jų nebus porų; b) bus viena pora; c) bus 2 poros?

2.115 Iš dėžės, kurioje yra *n* baltų ir *m* juodų rutulių, atsitiktinai ištraukta *s* rutulių. Po to traukiamas dar vienas. Kokia tikimybė, kad šis rutulys bus baltas?

2.116 Grupėje yra 30 žmonių. Kokia tikimybė, kad 3 iš jų yra gimę sausio mėnesį?

2.117 Kauliukas metamas 10 kartų. Kokia tikimybė, kad šešios akutės atvirs 3 kartus?

2.118 Niutono ir Pepis (Newton-Pepys) problema (1693 m.): ar vienodos galimybės laimėti trims žaidėjams, jeigu pirmajam turi atvirsti bent vieną kartą „6“ metant lošimo kauliuką 6 kartus; antrajam „6“ turi atvirsti ne mažiau kaip 2 kartus metant kauliuką 12 kartų; trečiajam „6“ turi atvirsti ne mažiau kaip 3 kartus metant kauliuką 18 kartų? Šį uždavinį išsprendė I. Niutonas (Isaac Newton), kurie parodė, kad pirmojo žaidėjo galimybės laimėti yra didžiausios, o trečiojo mažiausios. Įrodykite.

2.119 Pastebėta, kad tam tikroje vietovėje rugsėjo mėnesį būna 12 lietingų dienų. Kokia tikimybė, kad iš atsitiktinai parinktų 8 rugsėjo dienų 3 bus lietingos?

2.120 5 % gaminių yra nekokybiški. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai parinkus penkis gaminius tarp jų a) nekokybiškų nebus; b) bus du nekokybiški gaminiai?

2.121 Lygiomis dalimis sumaišyti žali ir geltoni žirniai. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paėmus penkis žirnius a) du iš jų bus žali; b) žalių žirnių bus mažiau nei du?

2.122 Sėklų daigumas 80 %. Kokia tikimybė, kad pasėjus penkias sėklas sudygs ne mažiau kaip keturios?

2.123 Berniuko gimimo statistinė tikimybė yra 0,515. Tarkime, kad stebime šeimas, turinčias po 3 vaikus. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai pasirinktoje šeimoje yra: a) lygiai 2 berniukai; b) nemažiau kaip 2 berniukai; c) bent vienas berniukas?

2.124 Berniuko gimimo statistinė tikimybė yra 0,515. Kokia tikimybė, kad iš 2*n* atsitiktinai atrinktų naujagimių a) bus bent vienas berniukas; b) bus po lygiai berniukų ir mergaičių?

2.125 Kas labiau tikėtina žaidžiant dviems lygiaverčiams varžovams: a) laimėti 2 partijas iš 3 ar 3 iš 5; b) laimėti bent 2 partijas iš 3 ar bent 3 iš 5 (lygiosios negalimos)?

2.126 Sistema sudaryta iš 5 A elementų, kurių patikimumas 0,9, ir 5 B elementų, kurių patikimumas 0,8. Sistema funkcionuoja, jei veikia nors 9 nepriklausomai elementai. Koks yra sistemos patikimumas?

2.127 Du žaidėjai po 4 kartus meta monetą. Laimi tas, kuriam daugiau kartų atvirsta herbas. Kokia tikimybė, kad laimės pirmasis?

2.128 Du žaidėjai paeiliui meta monetą. Laimi tas, kuriam pirmam atvirsta herbas. Kokia tikimybė, kad laimės pirmasis? Kokia tikimybė, kad lošimas baigsis po k-tojo metimo?

2.129 Du šachmatininkai sutarė žaisti mačą tokiomis sąlygomis: pirmasis pergalei pasiekti turi laimėti 12 pergalių, o antrasis – šešias (lygiosios neskaičiuojamos). Pirmasis prieš antrąjį laimi dukart dažniau, t. y. tikimybė, kad partiją laimės pirmasis yra 2/3. Mačą teko nutraukti, kai pirmasis žaidėjas buvo surinkęs 8 taškus, o antrasis – 4. Teisėjai nutarė nugalėtoju paskelbti tą žaidėją, kurio galutinės pergalės tikimybė didesnė. Kuris nugalėjo?

3. ATSITIKTINIAI DYDŽIAI IR JŲ SKIRSTINIAI

Atsitiktinio dydžio (a. d.) X skirstiniu vadinama funkcija, susiejanti a. d. vertes ir jų įgijimo tikimybes.

Skirstinio normavimo sąlyga: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$;

p_i - a. d. i-tąją vertę atitinkanti tikimybė, n – a. d. įgijamų verčių skaičius.

Pasiskirstymo funkcija: $F(x) = P(X < x)$.

Pasiskirstymo f-jos savybės:

1) $F(-\infty) = 0$;
2) $F(x_2) \geq F(x_1)$, kai $x_1 \leq x_2$;
3) $F(\infty) = 1$;
4) $P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

Tikimybės tankis: $w(x) = dF/dx$ ($F(x) = \int_{-\infty}^{x} w(x')dx'$).

Tikimybės tankio savybės:

1) $w(x) \geq 0$;
2) $P(x_1 \leq X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} w(x)dx$;
3) $\int_{-\infty}^{\infty} w(x)dx = 1$.

Vidurkis:

$$M(X) = \langle X \rangle = m_X = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, & \text{diskretusis a. d.;} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x w(x)dx, & \text{tolydusis a. d.} \end{cases}$$

Vidurkio savybės: 1) $M(cX) = cM(X)$;

2) $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$;
3) jei X ir Y yra nepriklausomi a. d., tai $M(XY) = M(X)M(Y)$;
4) centruotasis a. d.: $\overset{o}{X} = X - M(X)$.

Dispersija:

$$D(X) = \sigma_X^2 = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_X)^2 p_i, & \text{diskretusis a. d.;} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 w(x)dx, & \text{tolydusis a. d.} \end{cases}$$

Dispersijos savybės:

1) $D(cX) = c^2 \sigma_X^2$;
2) $D(X) = M(X^2) - m_X^2$;
3) $D(X \pm Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$ (tik nepriklausomiems X ir Y);
4) $D(XY) = \sigma_X^2 \sigma_Y^2 + m_X^2 \sigma_Y^2 + m_Y^2 \sigma_X^2$ (nepriklausomiems X ir Y).

A. d. k-tosios eilės pradinis momentas:

$$m_k = M\left(X^k\right) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i, & \text{diskretusis a. d.;} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k w(x) \mathrm{d}x, & \text{tolydusis a. d.} \end{cases}$$

A. d. k-tosios eilės centrinis momentas:

$$\mu_k = M\left(\overset{o}{X}{}^k\right) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_X)^k p_i, & \text{diskretusis a. d.;} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^k w(x) \mathrm{d}x, & \text{tolydusis a. d.} \end{cases}$$

Tikimybės tankio transformavimas, kai $Y = \varphi(X)$ ir atvirkštinė funkcija $X = \varphi^{-1}(Y)$ turi n sprendinių:

$$w(y) = \sum_{i=1}^{n} w\left[\varphi_i^{-1}(y)\right] \left| \frac{\mathrm{d}\varphi_i^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} \right|.$$

p eilės kvantilis – a. d. x_p vertė, kai $F\left(x_p\right) = p$;

mediana - kvantilis $x_{1/2}$, kai p=1/2.

Moda – a. d. vertė x_{m}, kai $w(x_{\mathrm{m}}) = w_{\max}(x)$.

Asimetrijos koeficientas: $\gamma_1 = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$.

Eksceso koeficientas: $\gamma_2 = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$.

Entropija: $H(X) = M(-\log_2 p)$.

Charakteristinė funkcija: $\Theta(u) = M\left(e^{\mathrm{j}uX}\right)$.

Charakteristinės funkcijos savybės:

1) $\Theta(0) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) e^{\mathrm{j}0x} \mathrm{d}x = 1$;

2) $\Theta(-u) = \Theta^*(u)$

(* - žymi kompleksinį jungtinį dydį);

3) jei $w(-x) = w(x)$, tai

$$\Theta(u) = 2\int_0^{\infty} w(x)\cos(ux)\mathrm{d}x;$$

4) $\Theta_{aX+b}(u) = \Theta_X(au)e^{\mathrm{j}bu}$;

5) $M\left(X^k\right) = \dfrac{1}{\mathrm{j}^k} \left.\dfrac{\partial^k \Theta(u)}{\partial u^k}\right|_{u=0}$;

6) $\Theta(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{M\left(X^k\right)}{k!} (\mathrm{j}u)^k$;

7) $w(x) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(u) e^{-\mathrm{j}ux} \mathrm{d}u$.

Generuojančioji funkcija: $\Psi(s) = M\left(s^X\right) = \sum_k p_k s^k$ $(-1 \le s \le 1)$.

Momentų radimas naudojant generuojančiąją funkciją:

$M(k) = \Psi'(1)$;

$M\left(k^2\right) = \Psi''(1) + \Psi'(1)$;

$\sigma^2 = \Psi''(1) + \Psi'(1)[1 - \Psi'(1)]$.

Pavyzdžiai:

1. Metamas lošimo kauliukas. Atsitiktinis dydis X – atvirtusių akučių skaičius.
a) Užrašykite a. d. skirstinį.
b) Užrašykite ir nubrėžkite a. d. pasiskirstymo funkciją.
c) Apskaičiuokite tikimybes $P(X=2)$, $P(X<3)$, $P(X\le 3)$, $P(2<X\le 4)$, $P(1<X<2)$.
d) Apskaičiuokite a. d. vidurkį, dispersiją ir standartinį nuokrypį.
e) Užrašykite a. d. charakteristinę ir generuojančiąją funkcijas.

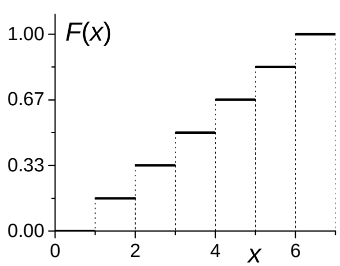
Sprendimas:

a) Kiekvienos iš kauliuko sienelių atvirtimas yra vienodai tikėtinas, taigi bet kurio akučių skaičiaus atvirtimo tikimybė yra 1/6.
A. d. skirstinį pateikiame lentele:

X	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

b)

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ 0+1/6=1/6, & 1\le x<2;\\ 1/6+1/6=1/3, & 2\le x<3;\\ 2/6+1/6=1/2, & 3\le x<4;\\ 3/6+1/6=2/3, & 4\le x<5;\\ 4/6+1/6=5/6, & 5\le x<6;\\ 5/6+1/6=1, & 6\le x;\end{cases}$$



c) Tikimybes galime apskaičiuoti iš skirstinio lentelės arba naudodami pasiskirstymo funkciją:

$P(X=2)=1/6$,

$P(X<3)=F(3)-F(-\infty)=1/3-0=1/3$,
$P(X\le 3)=F(3+0)-F(-\infty)=1/2-0=1/2$,
$P(2<X\le 4)=F(4+0)-F(2+0)=2/3-1/3=1/3$,
$P(1<X<2)=0$.

d) A. d. X vidurkis:

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3{,}5;$$

a. d. X kvadrato vidurkis:

$$M(X^2)=1\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+9\cdot\frac{1}{6}+16\cdot\frac{1}{6}+25\cdot\frac{1}{6}+36\cdot\frac{1}{6}=15{,}17;$$

a. d. X dispersija: $D(X)=M(X^2)-m_X^2=15{,}17-3{,}5^2=2{,}92$;

a. d. X standartinis nuokrypis: $\sigma_X=\sqrt{2{,}92}=1{,}71$.

e) A. d. X charakteristinė funkcija:

$$\Theta(u)=\sum_{i=1}^{6}e^{juX_i}p_i$$
$$=\frac{1}{6}e^{ju1}+\frac{1}{6}e^{ju2}+\frac{1}{6}e^{ju3}+\frac{1}{6}e^{ju4}+\frac{1}{6}e^{ju5}+\frac{1}{6}e^{ju6}$$
$$=\frac{1}{6}e^{ju}\left(1+e^{ju}+e^{ju2}+e^{ju3}+e^{ju4}+e^{ju5}\right);$$

A. d. X generuojančioji funkcija:

$$\psi(s)=\sum_{i=1}^{6}s^{X_i}p_i=\frac{1}{6}s^1+\frac{1}{6}s^2+\frac{1}{6}s^3+\frac{1}{6}s^4+\frac{1}{6}s^5+\frac{1}{6}s^6$$
$$=\frac{1}{6}s\left(1+s+s^2+s^3+s^4+s^5\right).$$

2. A. d. X, kurio vidurkis lygus nuliui, o dispersija lygi σ^2, pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį. Raskite a. d. $Y=1/X$ tikimybės tankį.

Sprendimas:

A. d. *X* tikimybės tankis: $w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x)^2}{2\sigma^2}\right]$;

a. d. *Y* tikimbės tankį andame pasinaudodami tikmybės tankio transformavimo formule: $w(y) = w[f(y)]\left|\frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y}\right|$;

$X = f(y) = \frac{1}{Y}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{1}{y^2}$;

$$w(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x)^2}{2\sigma^2}\right] \cdot \frac{1}{y^2} = \underline{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{y^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2 y^2}\right]}.$$

Uždaviniai:

3.1 A. d. *X* skirstinys apibūdinamas lentele:

X	-1	0	1
p	0,2	0,5	0,3

Raskite a. d. $Y = 2X - 1$ ir $Z = X^2$ tikimybių skirstinius.

3.2 A. d. *X* skirstinys apibūdinamas lentele:

X	1	3	5	7	9
p	p_1	0,2	0,3	0,3	0,1

Raskite p_1 ir a. d. *Y*=min(*x*, 4) skirstinį.

3.3 Pataikęs į taikinį šaulys gauna 5 taškus, nepataikęs dviejų taškų netenka. Pataikymo tikimybė 0,7. Sudarykite surinktų taškų skaičiaus tikimybių skirstinį, jei šaulys šovė 3 kartus.

3.4 Pataikymo į taikinį kiekvienu šūviu tikimybė yra *p*. A. d. *X* – šūvių skaičius iki pirmo pataikymo. Užrašykite a. d. *X* tikimybių skirstinį.

3.5 Tikimybė, kad per tam tikrą laiką dalelė išnyks, lygi 0,25, kad išliks – 0,25, kad suskils į dvi daleles – 0,5. Sudarykite dalelių

skaičiaus skirstinį antrojo periodo pabaigoje (pradžioje buvo viena dalelė). Kokia tikimybė, kad po dviejų periodų liks nors viena dalelė?

3.6 Bankas suteikė 10 paskolų, iš kurių 3 yra nemokios. Atsitiktinai paimamos 4 paskolos. Sudarykite imties nemokių paskolų skaičiaus tikimybių skirstinį ir apskaičiuokite tikimybes $P(1 < X \le 3)$, $P(X \ge 1)$. Koks yra tikimiausias nemokių paskolų skaičius imtyje?

3.7 Loterijoje, kurioje yra 100 bilietų, galima išlošti tris prizus: pirmojo vertė 100 litų, antrojo – 50 litų, trečiojo – 20 litų. Nustatykite laimėjimo vertės skirstinį ir vidutinę laimėjimo vertę, jei žaidėjas turi a) vieną; b) du bilietus.

3.8 Simetriška moneta metama a) du; b) tris kartus. A. d. *X* yra herbo atvirtimo skaičius. Užrašykite ir nubrėžkite pasiskirstymo funkciją. Apskaičiuokite tikimybes $P(1 < X)$, $P(1 < X < 2)$ ir $P(1 < X < 3)$.

3.9 Atkarpoje [*a*, *b*] atsitiktinai pažymimas taškas. A. d. *X* yra šio taško atstumas nuo atkarpos pradžios. Raskite *X* pasiskirstymo funkciją.

3.10 Atsitiktinio dydžio *X* skirstinys apibūdinamas lentele:

X	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

a) Užrašykite ir nubrėžkite a. d. *X* pasiskirstymo funkciją. b) Apskaičiuokite tikimybę, kad a. d. *X* absoliučioji vertė yra ne didesnė už vienetą.

3.11 Dėžėje yra 5 balti ir 25 juodi rutuliai. Atsitiktinai traukiamas a) vienas rutulys; b) du rutuliai. A. d. *X* – ištrauktų baltų rutulių skaičius. Užrašykite ir nubrėžkite a. d. *X* pasiskirstymo funkciją.

3.12 Metamos trys simetriškos monetos. A. d. X – atvirtusių herbų skaičius. Užrašykite a. d. X tikimybių skirstinį, užrašykite ir nubrėžkite pasiskirstymo funkciją.

3.13 Iš 25 gaminių partijos, kurioje yra 6 nekokybiški gaminiai, atsitiktinai paimami trys gaminiai. A. d. X – nekokybiškų gaminių skaičius imtyje. Užrašykite ir nubrėžkite a. d. X pasiskirstymo funkciją.

3.14 Ar funkcijos

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \mathrm{C}\ln x, & 0\le x<2;\\ 1, & x\ge 2;\end{cases} \quad \text{ir} \quad F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ \mathrm{C}\ln x, & 1\le x<2;\\ 1, & x\ge 2;\end{cases}$$

gali būti tikimybių pasiskirstymo funkcijos? Jei taip, apskaičiuokite konstantą C ir tikimybę $P\left(\frac{e}{2}<X\right)$.

3.15 Kamuolys į krepšį metamas tris kartus. A. d. X – pataikymų skaičius. Užrašykite ir nubrėžkite a. d. X pasiskirstymo funkciją, kai pataikymo tikimybė yra 0,4.

3.16 Elektrinėje grandinėje lygiagrečiai sujungti du nepriklausomai veikiantys elementai. Tikimybės, kad jie veiks laiko tarpą T yra vienodos ir lygios p. Raskite per laiko tarpą T sugedusių elementų skaičiaus tikimybių skirstinį, pasiskirstymo funkciją.

3.17 Nepriklausomai vienas nuo kito siunčiami du signalai. Jų priėmimo tikimybės yra 0,8 ir 0,9. Sudarykite nepriimtų signalų skaičiaus tikimybių skirstinį, užrašykite pasiskirstymo funkciją.

3.18 Esant kurioms parametrų a ir b vertėms funkcija $F(X)=a+b\operatorname{arctg}x$ yra pasiskirstymo funkcija? Suraskite šio skirstinio tikimybės tankį, tikimybę a. d. patekti į intervalą [-1; 1].

3.19 A. d. tikimybės tankis:

$$w(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ \mathrm{a}x+\mathrm{a}, & -1\le x<0;\\ \frac{\mathrm{a}}{2}x+\mathrm{a}, & 0\le x<2;\\ -2\mathrm{a}x+6\mathrm{a}, & 2\le x<3;\\ 0, & 3\le x.\end{cases}$$

a) Raskite konstantą a ir pasiskirstymo funkciją. b) Apskaičiuokite tikimybes: $P(-0{,}1\le X<1)$, $P(X>0)$ ir $P(|X-1|>1)$.

3.20 Serijomis gaminamų detalių ilgio skirstinį apibūdina tikimybės tankis $w(x)=\begin{cases}x/3, & 0<x<2;\\ 2-2x/3, & 2\le x\le 3;\\ 0, & \text{kitais atvejais.}\end{cases}$

Patikrinkite ar funkcija $w(x)$ tikrai yra tikimybės tankis. Raskite pasiskirstymo funkciją, apskaičiuokite tikimybę $P(1<X<2{,}5)$.

3.21 A. d. pasiskirstymo funkcija

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2;\\ (x-2)^2, & 2\le x<3;\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$

Raskite tikimybės tankį. Apskaičiuokite tikimybes $P(1<X<2{,}5)$, $P(2{,}5<X<3)$.

3.22 A. d. X tikimybės tankis

$$w(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ x-1/2, & 1\le x<2;\\ 0, & x\ge 2.\end{cases}$$

Raskite pasiskirstymo funkciją ir ją nubrėžkite.

3.23 A. d. X tikimybės tankis

$$w(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{\sin x}{2}, & 0\le x<\pi;\\ 0, & x\ge \pi.\end{cases}$$

Raskite pasiskirstymo funkciją, tikimybę, kad a. d. pateks į intervalą (0; π/4).

3.24 A. d. pasiskirstymo funkcija

a) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}x, & 0\le x<1;\\ 1, & x\ge 1;\end{cases}$ b) $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}x, & -1\le x<1;\\ 1, & x\ge 1;\end{cases}$

c) $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ 0{,}3, & -1\le x<0;\\ 0{,}5, & 0\le x<1;\\ 0{,}7, & 1\le x<2;\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$

Suraskite a. d. skirstinį (tikimybės tankį), apskaičiuokite šias tikimybes: $P(X=1/2)$, $P(X>0)$, $P(X=0)$, $P(0<X<1)$, $P(-1/2<X<1)$.

3.25 A. d. X tikimybės tankis $w(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{a}}{\pi\sqrt{4-x^2}}, & 2<x<2,\\ 0, & \text{kitais atvejais.}\end{cases}$

Raskite konstantą a, pasiskirstymo funkciją ir tikimybes $P(|X|\ge 1)$, $P(-1<X<1)$.

3.26 Raskite tokią konstantą a, kuriai esant funkcija $w(x)=\mathrm{a}e^{-|x|}$ yra tikimybės tankis. Užrašykite pasiskirstymo funkciją ir apskaičiuokite tikimybę $P(|X|\le \ln 3)$.

3.27 A. d. X tikimybės tankis $w(x)=\mathrm{A}x^2e^{-\lambda x}$ $(\lambda>0,\ 0\le x<\infty)$. Raskite konstantą A, a) užrašykite a. d. X pasiskirstymo funkciją; b) apskaičiuokite tikimybę, kad a. d. X pateks į intervalą (0, 1/λ).

3.28 A. d. X tikimybės tankis $w(x)=\dfrac{\mathrm{A}}{e^x+e^{-x}}$ $(-\infty<x<\infty)$.

Raskite konstantą A. Apskaičiuokite tikimybę, kad a. d. X įgis vertę mažesnę už vienetą.

3.29 Prietaiso paklaida pasiskirsčiusi pagal dėsnį

$$w(x)=\begin{cases}3\left(1-x^2\right)/4, & x\in[-1,\ 1]\\ 0, & x\notin[-1,\ 1]\end{cases}.$$

Kokia tikimybė, kad a) paklaida yra neigiama; b) absoliučioji paklaida yra nedidesnė už 1/2?

3.30 Du šauliai šaudo į taikinį. Jų surinktų taškų X ir Y skirstiniai pateikti lentelėse:

X	p
10	0,6
9	0,2
8	0,2

Y	p
10	0,5
9	0,5

Kuris šaulys yra taiklesnis?

3.31 Atsitiktiniai dydžiai X_1 ir X_2 yra nepriklausomi, $M(X_i)=a_i$, $D(X_i)=\sigma_i^2$. Raskite $D(X_1 X_2)$.

3.32 A. d. X vidurkis yra 2, o dispersija 10. Raskite a. d. $2X+5$ vidurkį ir dispersiją.

3.33 A. d. X skirstinys apibūdinamas lentele:

X	1	3	5	7	9
p	p_1	0,2	0,3	0,3	0,1

Apskaičiuokite a. d. X, $Y=2X+1$ ir $Z=X^2$ vidurkius ir dispersijas.

3.34 A. d. X ir Y yra nepriklausomi; jų vidurkiai yra vienodi ir lygūs 1; a. d. X dispersija lygi 1, o Y dispersija lygi 4. Raskite a. d. $Z = X - 2Y$ vidurkį ir dispersiją.

3.35 Į krepšį metami kamuoliai iki pirmo pataikymo. Kamuolio pataikymo į krepšį tikimybė $p=0{,}4$. Pratimui atlikti skiriami 4 kamuoliai. Atsitiktinis dydis X - mestų kamuolių skaičius. a) Užrašykite ir nubrėžkite pasiskirstymo funkciją. b) Apskaičiuokite a. d. X vidurkį ir dispersiją.

3.36 Realiųjų dujų sistemos dalelių kinetinės energijos tikimybės tankis: $w(E)=g(E)e^{-\frac{E}{kT}}$, kur $g(E)=\mathrm{A}\sqrt{E}$, k – Bolcmano (Boltzmann) konstanta, T – absoliučioji temperatūra. Raskite vidutinę energiją.

3.37 Elektroninio prietaiso patikimumo funkcija $P(T>t)=e^{-0{,}1t}+0{,}1te^{-0{,}1t}$, T – prietaiso nepertraukiamo veikimo trukmė. Raskite vidutinę prietaiso veikimo trukmę ir tikimybę $P(10 \le T \le 20)$.

3.38 Bandymais nustatytos dviejų prietaisų keliamo triukšmo tikimybės:

Triukšmo lygis balais		0	1	2	3
Triukšmo tikimybė	Prietaisas A	0,70	0,20	0,06	0,04
	Prietaisas B	0,80	0,06	0,04	0,10

Kuris prietaisas geresnis (vertinant pagal triukšmo lygį)?

3.39 A. d. X tikimybės tankis

$$w(x)=\begin{cases} \frac{2}{\pi}\cos^2 x, & |x| \le \pi/2; \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Apskaičiuokite a. d. X vidurkį ir dispersiją.

3.40 A. d. X skirstinys:

X	3	5	7	9
p	0,4	0,3	0,2	0,1

Raskite vidutinį kvadratinį nuokrypį.

3.41 A. d. X yra atvirtusių akučių skaičius metant vieną žaidimo kauliuką. Raskite a. d. vidurkį ir dispersiją.

3.42 Šaulys šauna į taikinį iki pirmo pataikymo (šovinių skaičius neribojamas). Visi šūviai nepriklausomi, o pataikymo tikimybė kiekvienu atveju yra p. Sudarykite a. d.: šūvių skaičius, tikimybės skirstinį. Apskaičiuokite vidurkį ir dispersiją.

3.43 Raskite determinanto $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, kurio elementai a_{ij} yra nepriklausomi, o $M(a_{ij})=0$ ir $D(a_{ij})=\sigma^2$, vidurkį ir dispersiją.

3.44 Per tam tikrą laiko periodą α dalelių, pasiekiančių skaitiklį, skaičius yra a. d. X, pasiskirstęs taip:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0,021	0,081	0,156	0,201	0,195	0,151	0,097	0,054	0,026	0,01	0,007

Raskite a. d. X vidurkį, dispersiją ir tikimybę, kad per vieną periodą detektorių pasiekia ne mažiau kaip 4 dalelės.

3.45 Atsitiktinai į R spindulio apskritimą padedamas taškas. A. d. X yra apskritimo, kurio spindulys yra taško atstumas iki apskritimo centro, plotas. Raskite a. d. X pasiskirstymo funkciją ir dispersiją.

3.46 Apskaičiuokite molekulių greičio v Maksvelo (Maxwell) skirstinio (tikimybės tankis: $p(v) = \mathrm{A}v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$, čia m yra molekulės masė, k – Bolcmano (Boltzmann) konstanta, T – absoliučioji temperatūra) konstantą A, vidutinį greitį, greičio kvadrato vidurkį ir tikimiausią greitį. Apskaičiuokite vidutinę kinetinę molekulių energiją.

3.47 A. d. X yra tolygiai pasiskirstęs intervale nuo –3/4 iki 3/4, bei įgyja diskrečiąsias vertes 1 ir –1, kurių įgijimo tikimybės lygios 1/4. a) Užrašykite ir nubrėžkite pasiskirstymo funkciją. b) Apskaičiuokite tikimybę atsitiktiniam dydžiui X patekti į intervalą nuo -1/2 iki 1/2. c) Apskaičiuokite a. d. X vidurkį ir dispersiją.

3.48 A. d. X tenkina nelygybę $1 \le X \le 5$. Jo tikimybės tankis $w(x) = \begin{cases} \mathrm{a}, & 1 < x < 3; \\ 2\mathrm{a}, & 3 < x < 5; \end{cases}$ be to vertes 1, 3 ir 5 įgyja su tikimybėmis atitinkamai lygiomis 0,1, 0,2, 0,3. a) Užrašykite ir nubrėžkite pasiskirstymo funkciją. b) Apskaičiuokite tikimybę a. d. patekti į intervalą nuo 2 iki 4. c) Apskaičiuokite a. d. X vidurkį ir dispersiją.

3.49 Taikinį sudaro 3 koncentriniai apskritimai, kurių spinduliai yra $1/\sqrt{3}$, 1, $\sqrt{3}$. Pataikius į centrinį skritulį šauliui skiriami 4 taškai, į vidurinį žiedą – 3 taškai, į kraštinį žiedą – 2 taškai. Pataikius už apskritimų ribų taškai neskiriami. Tikimybė pataikyti į r spindulio apskritimą yra $\frac{1}{\pi\left(1+r^2\right)}$. Rakite taškų, surinktų šovus 5 kartus, vidurkį.

3.50 A. d. X yra tolygiai pasiskirstęs atkarpoje [a, b]. a) Raskite jo tikimybės tankį ir pasiskirstymo funkciją. b) Raskite tikimybę, kad a. d. X įgis vertes tarp α ir β, jei $\mathrm{a}<\alpha<\beta<\mathrm{b}$.

3.51 Kvadrato kraštinės ilgis tolygiai pasiskirstęs intervale [0, 2]. Raskite šio kvadrato ploto vidurkį.

3.52 Autobusas pagal grafiką atvažiuoja į stotelę kas 5 min. Raskite tikimybę, kad keleivis, atėjęs atsitiktiniu tam tikru laiku, lauks autobuso ne daugiau kaip 3 min.

3.53 Matavimo prietaiso skalė yra tolygi, o mažiausios padalos vertė 10 vienetų. Matavimo rodmenys apvalinami iki artimiausios padalos vertės. Raskite tikimybę, kad matavimo paklaida neviršys dviejų.

3.54 Nepriklausomi a. d. X ir Y yra tolygiai pasiskirstę: X intervale [0; 1], o Y intervale [1; 3]. Raskite jų sandaugos vidurkį ir dispersiją.

3.55 A. d. X yra apytiksliai išmatuota kubo kraštinė. Žinoma, kad matavimo rezultatai yra tolygiai pasiskirstę intervale nuo a iki b. Raskite kubo tūrio vidurkį ir dispersiją.

3.56 Koeficientai *p* ir *q* yra tolygiai pasiskirstę kvadrate, kurio viršūnių koodinatės: (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1). Raskite tikimybę, kad lygties $x^2 + px + q = 0$ šaknys yra realios.

3.57 Įrodykite, kad atliekant vieną eksperimentą, kai sėkmė ir nesėkmė yra vienodai tikimi atsitiktiniai įvykiai, atsitiktinis dydis *X* sėkmės aveju įgyja vertę lygią 1, nesėkmės atveju – vertę lygią 0, atsitiktinio dydžio *X* dispersija neviršija 1/4.

3.58 Raskite vidutinį laimingų loterijos bilietų skaičių, jei įsigyta 40 bilietų, o laimėjimo tikimybė 0,05.

3.59 Atlikta 20 nepriklausomų bandymų, kurių sėkmės tikimybė yra 0,2. Raskite a. d.: sėkmingų bandymų skaičius, dispersiją.

3.60 Žvejys vidutiniškai pagauna vieną žuvį metęs spiningą 200 kartų. Kokia tikimybė, kad žvejys pagavo vieną žuvį metęs spiningą a) 100; b) 200; c) 400 kartų?

3.61 Tikimybė, kad detalė yra su defektu, lygi 0,02. Detalės pakuojamos po šimtą vienetų. Kokia tikimybė, kad a) pakuotėje nebus defektingų detalių; b) bus ne daugiau kaip dvi defektingos detalės?

3.62 Tikimybė pagaminti nestandartinį gaminį yra 0,01. Kokia tikimybė, kad iš 200 gaminių a) 4 bus nestandartiniai; b) nestandartinių bus ne daugiau kaip 4?

3.63 Tikimybė pataikyti į taikinį yra 0,001. Raskite tikimybę, kad šovus 5000 kartų pataikyta ne mažiau kaip du kartus.

3.64 Tikimybė, kad per vieną valandą paskambins kuris nors iš 800 stoties aptarnaujamų abonentų, yra 0,01. Raskite tikimybę, kad per vieną valandą paskambins 5 abonentai.

3.65 Gauta 1000 lempučių siunta. Tikimybė, kad siunčiant lemputė suges, lygi 0,002. Apskaičiuokite vidutinį sugedusių

lempučių skaičių, standartinį nuokrypį, tikimybę, kad a) siunčiant suges 4 lemputės; b) nesuges nė viena lemputė; c) suges nors viena lemputė.

3.66 Vidutinis bakterijų tankis ore: 100 bakterijų viename kubiniame metre. Raskite tikimybę, kad paėmus 2 dm^3 oro mėginį, jame bus nors viena bakterija.

3.67 Rezerfordo (Ernest Rutherford) ir Geigerio (Hans Geiger) bandymuose per 7,5 s radioaktyvi medžiaga vidutiniškai išspinduliuodavo 3,87 α daleles. Raskite tikimybę, kad ši medžiaga išspinduliuos bent vieną dalelę per 1 s.

3.68 Atsitiktinio dydžio X tikimybės tankis $w(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$ (Koši (Cauchy) skirstinys). Raskite konstantą *a* ir pasiskirstymo funkciją. Nustatykite, ar egzistuoja Koši skirstinio vidurkis. Raskite tikimybę $P(-1<X<1)$.

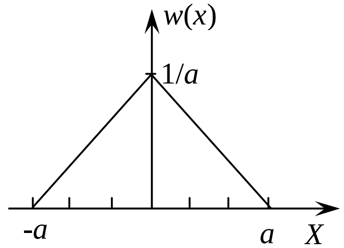
3.69 Galvaninio elemento ilgalaikiškumą apibūdina Veibulo (Weibull) skirstinys: $F(x) = 1 - e^{-\frac{x^\alpha}{x_0}}$ ($x>0$, $\alpha>0$, $x_0>0$). Raskite tikimybės tankį ir apskaičiuokite tikimybę, kad per laiko tarpą $\left(0,\ x_0^{1/2}\right)$ elementas neišsieikvos (a) kai $\alpha=1$, $x_0=1$; b) kai $\alpha=1/2$, $x_0=1$; c) kai $\alpha=2$, $x_0=1$).

3.70 A. d. *X* tikimybės tankis atitinka Laplaso (Laplace) skirstinį: $w(x) = \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$. Suraskite a. d. vidurkį ir dispersiją.

3.71 Laiko tarpo *x* tarp dviejų gretimų elektronų emisijos įvykių skirstinys yra eksponentinis: $w(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \lambda > 0. \end{cases}$ Raskite

a) pasiskirstymo funkciją; b) vidurkį ir dispersiją; c) tikimybę, kad a. d. įgyja vertes, mažesnes už vidurkį; d) tikimybę $P\left(\left|X - M(X)\right| < 3\sqrt{D(X)}\right)$.

3.72 Atsitiktinio dydžio X tikimybės tankio funkcija pavaizduota paveiksle (Simpsono (Simpson) skirstinys). Užrašykite a. d. X tikimybės tankio ir pasiskirstymo funkcijas, raskite vidurkį ir dispersiją.



3.73 A. d. X, Y ir Z yra nepriklausomi, o jų eksponentiniai skirstiniai yra vienodi. Raskite šių dydžių funkcijų a) $X+Y+Z$; b) aX+bY-cZ; c) XYZ vidurkius.

3.74 Juostos apkrovos skirstinys yra normalusis: $w(x) = \frac{10}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-50(x-5)^2\right)$. Apskaičiuokite tikimybę, kad juosta nutrūks, jei apkrova, nutraukianti juostą, lygi 5,08 kg.

3.75 A. d X pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį. Jo vidurkis lygus nuliui, o tikimybė patekti į intervalą (-2, 2) lygi 0,5. Raskite a. d. X standartinį nuokrypį.

3.76 Atstumo matavimo tam tikru prietaisu paklaida pasiskirsčiusi pagal normalųjį dėsnį, kurio m=5 m, σ=10 m. Raskite tikimybę, kad išmatuotas atstumas skirsis nuo tikrojo ne daugiau kaip 20 m.

3.77 A. d. X pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį, kurio m=0, σ=1. Kas daugiau: $P(-0{,}5 \le X \le -0{,}1)$ ar $P(1 \le X \le 2)$?

3.78 A. d. X pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį. Apskaičiuokite tikimybę $P\left(\left|X - M(X)\right| < 3\sqrt{D(X)}\right)$.

3.79 A. d. X tikimybės tankis $f(X)$. Raskite a. d. Y=3X tikimybės tankį.

3.80 Atsitiktinio dydžio X tikimybės tankis $w(x)$ atitinka Koši (Cauchy) skirstinį $\left(w(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\right)$. Raskite atsitiktinio dydžio Y tikimybės tankio išraišką, jeigu a) $Y=1-X^3$; b) $Y = 1/X$.

3.81 Atsitiktinio dydžio X tikimybės tankis $w(x)=1$ (0<x<1). Raskite atsitiktinio dydžio Y tikimybės tankio išraišką, jeigu a) $Y = 1 - X$; b) $Y = -\ln(1-X)$.

3.82 Kubo briauna yra atsitiktinis dydis tolygiai pasiskirstęs intervale (0, 1). Raskite kubo tūrio tikimybės tankį, vidurkį ir dispersiją.

3.83 Molekulių susidūrimo greičio skirstinį apibūdina Relėjaus (Rayleigh) dėsnis $w(x) = \frac{x}{\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$. Susidūrimo metu išsiskiriančios energijos kiekio vidurkis yra $Y = \mathrm{c}\left(1 - X^2\right)$ (c>0). Raskite Y tikimybės tankį.

3.84 Skritulio spindulys pasiskirstęs pagal Relėjaus (Rayleigh) dėsnį. Raskite skritulio ploto tikimybės tankį.

3.85 A. d. X tikimybės tankis $w(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ Cx^{-3/2}, & x>1.\end{cases}$ Raskite konstantą C, a. d. Y=1/X tikimybės tankį, tikimybes $P(0 \le X \le 2)$, $P(0{,}1 \le Y \le 0{,}2)$.

3.86 A. d. X tolygiai pasiskirstęs intervale (-π/2; π/2). Raskite a. d. Y=sin$X$ tikimybės tankį.

3.87 A. d. X tikimybės tankis $w(x)=e^{-x}$, $x \ge 0$. Raskite a. d. $Y = e^{-X}$ tikimybės tankį ir pasiskirstymo funkciją.

3.88 A. d. skirstinys pateiktas lentelėje.

X	2	4	6	8
P	0,4	0,3	0,2	0,1

Raskite pirmųjų keturių eilių pradinius ir centrinius momentus, asimetrijos ir eksceso koeficientus.

3.89 A. d. X, Y ir Z skirstiniai pateikti lentelėse:

X	0	1	2	3	4
P	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Y	8	9	10	11	12
P	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Z	-2	0	4	6
P	0,3	0,2	0,2	0,3

Palyginkite šių dydžių vidurkius ir dispersijas, raskite modas ir medianas.

3.90 Dydžio X pasiskirstymo funkcija $F(X)=1-\exp\left(-x^2/2\sigma^2\right)$, x≥0 (Relėjaus skirstinys). Suraskite dydžio X a) tikimybės tankį ir vidurkį; b) dispersiją; c) modą; d) medianą.

3.91 Dalelės skilimo trukmė T yra pasiskirsčiusi pagal eksponentinį dėsnį. Raskite dalelės vidutinę skilimo trukmę, skilimo pusamžį ir modą.

3.92 Du įrenginio blokai veikia nepriklausomai. Tikimybė, kad laiko tarpą T pirmasis blokas nesuges yra 0,5, antrasis – 0,8. Apskaičiuokite veikiančių blokų skaičiaus modą, medianą ir asimetrijos koeficientą.

3.93 A. d. X pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį. Jo vidurkis lygus -3, dispersija lygi 4. Apskaičiuokite tikimybes ir kvantilius: a) $P(X>-1)$, $x_{1/2}$; b) $P(-4 \le X < 1)$, $x_{1/4}$; c) $P(|X|>2)$, $x_{0,05}$; d) $P(|X+3|<1)$, $x_{0,01}$.

3.94 Suraskite binominio skirstinio modą.

3.95 Lošimo kauliukas metamas 50 kartų. Raskite tikimiausią šešių akučių atvirtimo skaičių ir jo tikimybę.

3.96 Prietaisas sudarytas iš aštuonių nepriklausomai veikiančių elementų, kurių kiekvieno tikimybė sugesti per laiko tarpą T yra 0,2. Prietaisas veikia, jei sugenda ne daugiau kaip du elementai. Raskite tikimiausią ir vidutinį sugedusių elementų skaičių. Apskaičiuokite tikimybę, kad prietaisas veiks laiko tarpą T.

3.97 Ryšio linija nepriklausomai perduodami 4 pranešimai. Tikimybė, kad kiekvienas jų bus priimtas, lygi 0,8. Raskite priimtų pranešimų skaičiaus tikimybių skirstinį, jo modą, vidurkį ir dispersiją. Apskaičiuokite tikimybę, kad a) bus priimti ne mažiau kaip trys pranešimai; b) bus priimtas nors vienas pranešimas.

3.98 A. d. X tikimybių skirstinys yra binominis, vidurkis lygus 1, o dispersija lygi 2/3. Raskite a. d. X tikimybių skirstinį, jo modą, apskaičiuokite tikimybę $P(X>m_X)$.

3.99 Kiekvieno iš keturių matavimų teigiamosios paklaidos tikimybė yra 2/3, neigiamosios – 1/3. Raskite tikimiausius teigiamųjų ir neigiamųjų paklaidų skaičius ir jų tikimybes.

3.100 Atliekant bandymą sėkmingo rezultato tikimybė yra 2/3. Koks tikimiausias sėkmingų bandymų skaičius, jei iš viso atlikti septyni bandymai?

3.101 Į taikinį iššauta 14 kartų, pataikymo tikimybė 0,2. Suraskite tikimiausią pataikymų skaičių ir šio skaičiaus tikimybę.

3.102 Kiekvienu šūviu pataikymo į taikinį tikimybė yra 0,8. Kiek reikia atlikti šūvių, kad tikimiausias pataikymų skaičius būtų 20?

3.103 Vidutiniškai 10 % firmos gaminamų detalių yra nestandartinės. Tikrinant detalių kokybę iš kiekvienos partijos atsitiktinai paimama 20 detalių. Jei imtyje yra ne daugiau kaip trys nestandartinės detalės, tai partija priimama. Koks yra tikimiausias ir vidutinis nestandartinių detalių skaičius imtyje? Kokia tikimybė, kad detalių partija bus priimta?

3.104 A. d. *X* yra tolygiai pasiskirstęs intervale (-a/2; a/2). Suraskite a. d. *X* charakteristinę funkciją.

3.105 A. d. *X* skirstinys yra eksponentinis. Raskite *Y*=a*X*+b charakteristinę funkciją.

3.106 Suraskite atsitiktinio dydžio *X*, kurio charakteristinė funkcija $\Theta(u)=\dfrac{1}{1+u^2}$, tikimybės tankį.

3.107 Apskaičiuokite a) binominio; b) Puasono (Poisson); c) normaliojo; d) tolygiojo; e) eksponentinio skirstinių vidurkį ir dispersiją panaudodami charakteristinę funkciją.

3.108 Metame monetą. A. d. *X* įgyja vertę “-1”, jei atvirsta herbas, “+1” – jei skaičius. Užrašykite charakteristinę funkciją; naudodami ją suraskite trečiosios eilės pradinį momentą. Apskaičiuokite entropiją.

3.109 Atsitiktinį dydį *X* aprašo Puasono (Poisson) skirstinys. Panaudodami generuojančiąją funkciją apskaičiuokite a. d. *X* asimetrijos koeficientą.

3.110 Atsitiktinio dydžio *X* skirstinys apibūdinamas lentele:

X	0	1	3	4	5
p	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Raskite generuojančiąją ir charakteringąją funkcijas, naudodami jas apskaičiuokite a. d. *X* vidurkį ir dispersiją.

3.111 A. d. generuojančioji funkcija yra

a) $\Psi(s)=0{,}1s^2+0{,}3s^3+0{,}5s^5+0{,}1s^6$;

b) $\Psi(s)=0{,}3+0{,}5s+0{,}2s^3$; c) $\Psi(s)=0{,}3s+0{,}7s^4$.

Nustatykite a. d. skirstinį, raskite charakteringąją funkciją, naudodami generuojančiąją funkciją apskaičiuokite vidurkį ir dispersiją.

4. ATSITIKTINIAI VYKSMAI IR VEIKSMAI SU JAIS

n-mačio tikimybės tankio savybės:

1) $w_n(x_1,x_2,...,x_n,t_1,t_2,...,t_n)\ge 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_n(x_1,x_2,...,x_n,t_1,t_2,...,t_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2...\mathrm{d}x_n=1$;

3) $w_2(x_1,x_2)=w_2(x_2,x_1)$;

4) jei $m<n$, tai $w_m(x_1,x_2,...,x_m,t_1,t_2,...,t_m)$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_n(x_1,x_2,...,x_n,t_1,t_2,...,t_n)\mathrm{d}x_{m+1}...\mathrm{d}x_n .$$

Sąlyginis tikimybės tankis:

$$w(x_1,t_1\mid x_2,t_2)=\frac{w(x_1,x_2,t_1,t_2)}{w(x_2,t_2)}.$$

Būtina ir pakankama reikšmių x_1 ir x_2 nepriklausomumo sąlyga:

$$w_2(x_1,x_2,t_1,t_2)=w_1(x_1,t_1)w_1(x_2,t_2).$$

Daugiamatė charakteristinė funkcija:

$$\Theta_n(u_1,u_2,...,u_n,t_1,t_2,...,t_n)=M\left(e^{j(u_1x_1+u_2x_2+...+u_nx_n)}\right),$$

$$w_n(x_1,x_2,...,x_n,t_1,t_2,...,t_n)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-j(u_1x_1+...+u_nx_n)}\Theta_n(u_1,...,u_n,t_1,...,t_n)\mathrm{d}u_1...\mathrm{d}u_n;$$

normavimo sąlyga: $\Theta_n(0,...,0)=1$;

jei vertės x_1, x_2, …, x_n yra nepriklausomos,

tai $\Theta_n(u_1,...,u_n,t_1,...,t_n)=\prod\limits_{k=1}^{n}\Theta_1(u_k)$.

Daugiamatė pasiskirstymo funkcija:

$$F_n(x_1,x_2,...,x_n,t_1,t_2,...,t_n)$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{x_1}...\int\limits_{-\infty}^{x_n} w_n(x'_1,...,x'_n,t_1,...,t_n)\mathrm{d}x'_1...\mathrm{d}x'_n;$$

$$w_n(x_1,...,x_n,t_1,...,t_n)=\frac{\partial^n F_n(x_1,x_2,...,x_n,t_1,t_2,...,t_n)}{\partial x_1...\partial x_n}.$$

n-matis (i_1+…+i_n) eilės pradinis momentas:

$$M_{i_1,...,i_n}(t_1,...,t_n)=\left\langle X_1^{i_1}(t_1)...X_n^{i_n}(t_n)\right\rangle.$$

n-matis (i_1+…+i_n) eilės centrinis momentas:

$$\mu_{i_1,...,i_n}(t_1,...,t_n)$$

$$=\left\langle \left(X_1(t_1)-M_1(t_1)\right)^{i_1}...\left(X_n(t_n)-M_n(t_n)\right)^{i_n}\right\rangle.$$

Koreliacijos funkcija:

$$k_{xy}(t_1,t_2)=\left\langle \left(X(t_1)-m_x\right)\left(Y(t_2)-m_y\right)\right\rangle$$

$$=\left\langle X(t_1)Y(t_2)\right\rangle-m_xm_y;$$

jei vyksmai *X* ir *Y* yra nepriklausomi, tai $k_{xy}=0$.

Autokoreliacijos funkcijos savybės:

1) $k(\tau)=k(-\tau)$;

2) $|k(\tau)|\le k(0)=\sigma^2$;

3) $\lim\limits_{\tau\to\infty}k(\tau)=0$;

4) $\int_0^{\infty} k(\tau)\cos 2\pi f\tau \mathrm{d}\tau \geq 0$.

Koreliacijos koeficientas: $r(\tau)=\dfrac{k(\tau)}{\sigma^2}$,

$$r_{XY}(\tau)=\frac{k_{XY}(\tau)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Čebyševo (П. Чебышёв) nelygybė:

$$P(|X-m_X|>\varepsilon)\leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}.$$

Centrinė ribinė teorema ir jos taikymas:

$$\lim_{n\to\infty} P(x_1<S_{nX}<x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{s_1}^{s_2} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x,$$

$$S_{nX}=\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$x_1=s_1\sigma\sqrt{n}+nm,\quad x_2=s_2\sigma\sqrt{n}+nm;$$

Binominio skirstinio aproksimavimas normaliuoju skirstiniu (Muavro (Abraham de Moivre) ir Laplaso (Pierre-Simon Laplace) teorema):

$$\lim_{n\to\infty} P(k_1<k_n<k_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{s_1}^{s_2} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x,$$

$$k_1=s_1\sqrt{npq}+np,\quad k_2=s_2\sqrt{npq}+np.$$

Santykinio dažnio nuokrypio nuo įvykio tikimybės įvertinimas: įvykio *A* tikimybė lygi *p* (priešingo įvykio tikimybė: *q*=1-*p*); atlikus *n* bandymų, įvykis *A* įvyko *m* kartų; tada:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-1.$$

Pavyzdžiai:

1. A. d. *X* skirstinys

X	2	4	6	8
P	0,4	0,3	0,2	0,1

Remiantis Čebyševo nelygybe įvertinkite tikimybes $P(|X-m_X|>3)$ ir $P(|X-m_X|<3)$. Gautą įvertį palyginkite su tikslia tikimybės verte.

Sprendimas:

Čebyševo nelygybė: $P(|X-m_X|>\varepsilon)\leq \dfrac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}$;

$\varepsilon=3$;

$m_X=2\cdot 0{,}4+4\cdot 0{,}3+6\cdot 0{,}2+8\cdot 0{,}1=4$,

$m_{X^2}=4\cdot 0{,}4+16\cdot 0{,}3+36\cdot 0{,}2+64\cdot 0{,}1=20$,

$\sigma_X^2=20-16=4$;

$P(|X-m_X|>3)\leq \dfrac{4}{9}=0{,}44$,

tiksli vertė $P(|X-m_X|>3)=0{,}1$;

$$\underbrace{1-P(|X-m_X|>\varepsilon)}_{P(|X-m_X|<\varepsilon)}\geq 1-\frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2},$$

$P(|X-m_X|<3)\geq 1-\dfrac{4}{9}=0{,}56$,

tiksli vertė $P(|X-m_X|<3)=0{,}9$.

2. Atliekama 200 bandymų. Kiekvieno bandymo metu įvykio *A* įvykimo tikimybė lygi 0,8. Apskaičiuokite tikimybę, kad

a) įvykis *A* įvyks ne mažiau kaip 150 ir ne daugiau kaip 170 kartų; b) įvykis *A* įvyks ne mažiau kaip 150 kartų; c) įvykis *A* įvyks ne daugiau kaip 149 kartus.

Sprendimas:

Panaudojant Muavro teoremą:

$$P_n(k_1 < k < k_2) = \Phi(s_2) - \Phi(s_1),$$

$$s_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},\; s_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Normaliojo skirstinio pasiskirstymo funkcijos $\Phi(z)$ vertės pateiktos P1 priedo 2 lentelėje.

a) n=200, p=0,8, q=1-p=0,2, k_1=150, k_2=170;

$$s_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{150 - 200\cdot 0{,}8}{\sqrt{200\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = -1{,}77,$$

$$s_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{170 - 200\cdot 0{,}8}{\sqrt{200\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = 1{,}77;$$

$$P_{200}(150 < k < 170) = \Phi(1{,}77) - \Phi(-1{,}77)$$

$$\overbrace{=2\Phi(1{,}77)-1}^{\Phi(-z)=1-\Phi(z)} = 0{,}9232.$$

b) n=200, p=0,8, q=1-p=0,2, k_1=150, k_2=200;

$$s_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{150 - 200\cdot 0{,}8}{\sqrt{200\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = -1{,}77,$$

$$s_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{200 - 200\cdot 0{,}8}{\sqrt{200\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = 7{,}07;$$

$$P_{200}(150 \le k) = \underbrace{\Phi(7{,}07)}_{=1} - \Phi(-1{,}77) = 1 - \Phi(-1{,}77)$$

$$= 1 - (1 - \Phi(1{,}77)) = 0{,}9616.$$

c) įvykiai „įvykis *A* įvyks ne mažiau kaip 150 kartų“ ir „įvykis *A* įvyks ne daugiau kaip 149 kartus“ yra priešingi, taigi:

$$P_{200}(k \le 149) = 1 - P_{200}(150 \le k) = 1 - 0{,}9616 = 0{,}0384.$$

3. Lošimo kauliuką metame 1000 kartų. Kokia tikimybė, kad ne mažiau kaip 450 ir ne daugiau kaip 550 kartus atvirs lyginis akučių skaičius?

Sprendimas:

Pagal Muavro ir Laplaso teoremą:

$$\lim_{n\to\infty} P(450 < k_n < 550) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{s_1}^{s_2} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx,$$

$$s_1 = \frac{450 - 1000\cdot 0{,}5}{\sqrt{1000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}} = -3{,}16,\; s_2 = \frac{550 - 1000\cdot 0{,}5}{\sqrt{1000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}} = 3{,}16;$$

$$P(450 < k_n < 550) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-3{,}16}^{3{,}16} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \Phi(3{,}16) - \Phi(-3{,}16)$$

$$= 2\Phi(3{,}16) - 1 = 2\cdot 0{,}99931 - 1 = 0{,}99862.$$

4. Atsitiktinis dydis X yra pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį, kurio vidurkis $a=M(X)$ ir dispersija σ^2=16. Raskite simetrinį vidurkio $a=M(X)$ interval, į kurį X patenka su tikimybe 0,95

Sprendimas:

Ieškomasis intervalas: $(a-\alpha; a+\alpha) = I$.

Sprendimui naudojame formules:

$$\Phi_{a;\sigma}(x) = \Phi_{0;1}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),\; \Phi_{0;1}(-x) = 1 - \Phi_{0;1}(x).$$

Tada:

$$P\left(X_{0;4} \in I\right) = \Phi_{0;4}(a+\alpha) - \Phi_{0;4}(a-\alpha)$$

$$= \Phi_{0;1}\left(\frac{a}{4}\right) - \Phi_{0;1}\left(\frac{a}{4}\right) = 2\Phi_{0;1}\left(\frac{a}{4}\right) - 1 = 0{,}95,$$

t. y. $\Phi_{0;1}\left(\frac{a}{4}\right) = 0{,}975$.

Funkcijos $\Phi_{0;1}(x)$ vertes randame P1 priedo 2 lentelėje:

$\Phi_{0;1}(1{,}96) = 0{,}975$; taigi $\frac{\alpha}{4} = 1{,}96$, $\alpha = 7{,}84$.

Simetrinis intervalas: $(a - 7{,}84; a + 7{,}84)$.

Uždaviniai:

4.1 Įrodykite, kad funkcija $w(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 \le y \le x,\ 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{kitais atvejais} \end{cases}$ yra dvimačio a. d. (*X*, *Y*) tikimybės tankis.

4.2 Dvimačio a. d. (*X*, *Y*) tikimybės tankis

$$w(x,y) = \begin{cases} x\exp(-x(1+y)), & 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty, \\ 0, & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Raskite vienmačius ir sąlyginius tikimybės tankius. Nustatykite, ar dydžiai *X* ir *Y* yra priklausomi. Apskaičiuokite tikimybę $P(X < Y)$.

4.3 Atsitiktinio dydžio (*X*, *Y*) tikimybės tankis

$$w(x,y) = \begin{cases} 2\exp(-(x+y)), & 0 < x < y,\ 0 < y < \infty; \\ 0, & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Raskite vienmačius *X* ir *Y* skirstinius. Nustatykite, ar *X* ir *Y* yra priklausomi. Apskaičiuokite sąlyginius tikimybės tankius.

4.4 Dvimačio a. d. (*X*, *Y*) tikimybės tankis

$$w(x,y) = \begin{cases} Cxy, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 2, \\ 0, & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Raskite konstantą C; a) dvimatę pasiskirstymo funkciją; b) sąlyginius *X* ir *Y* tikimybės tankius. Nustatykite, ar dydžiai *X* ir *Y* yra priklausomi.

4.5 A. d. *X* ir *Y* yra nepriklausomi ir pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį, kurio $m_X = m_Y = 0$, $\sigma_X = \sigma_Y = 1$. Raskite tikimybę, kad taškas (*x*, *y*) pateks į žiedą $2 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 3$.

4.6 Dviejų elementų ilgalaikiškumą apibūdina dvimatis a. d. (*X*, *Y*), kurio pasiskirstymo funkcija

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-2y} + e^{-(x+2y)}, & x \ge 0,\ \ y \ge 0; \\ 0, & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Raskite vienmačius *X* ir *Y* skirstinius. Apskaičiuokite tikimybes $P(0 \le X \le 1, Y > 2)$, $P(X > Y)$.

4.7 Dvimačio a. d. pasiskirstymo funkcija $F(x,y) = \left(1 + e^{-\alpha x}\right)\left(1 - e^{\beta y}\right)$. Raskite dvimatį tikimybės tankį.

4.8 Dviejų sistemų ilgalaikiškumas (T_1, T_2) apibūdinamas tikimybių pasiskirstymo funkcija $F(t_1, t_2) = 1 - e^{-\lambda_1 t_1} - e^{-\lambda_2 t_2} + e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2}$. Raskite tikimybės tankį ir vienmačius skirstinius, nustatykite ar T_1 ir T_2 yra priklausomi. Apskaičiuokite tikimybes, kad a) abiejų sistemų ilgalaikiškumas bus ne mažesnis nei τ; b) praėjus laiko tarpui τ, pirmoji sistema suges, o antroji ne; c) pirmoji sistema suges greičiau už antrąją.

4.9 Dvimačio a. d. (X, Y) pasiskirstymo funkcija

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\ x\le 0;\\ xy, & 0<y<1,\ 0<x<1;\\ x, & 0<y<1,\ 1\le x;\\ y, & 0<x<1,\ 1\le y;\\ 1, & 1\le x,\ 1\le y.\end{cases}$$

Raskite dvimatį ir vienmačius tikimybės tankius. Nustatykite, ar dydžiai X ir Y yra priklausomi. Apskaičiuokite tikimybę $P(X\ge 1/2, Y\ge 1/2)$.

4.10 A. d. (X, Y) tikimybės tankis $w(x,y)=\dfrac{\mathrm{A}}{\pi^2(3+x^2)(1+y^2)}$.

Raskite konstantą A; a) pasiskirstymo funkciją; b) tikimybę atsitiktiniam dydžiui patekti į kvadratą, apribotą tiesėmis x=0, y=0, x=1, y=1.

4.11 A. d. (X, Y, Z) tikimybės tankis

$$w(x,y,z)=\begin{cases}12x^2yz, & 0<x,y,z<1,\\ 0, & \text{kitais atvejais.}\end{cases}$$

Raskite vienmates X, Y ir Z pasiskirstymo funkcijas, tikimybę $P(X<Y<Z)$.

4.12 k_1, k_2, …, k_n yra sveikieji atsitiktiniai nepriklausomi skaitmenys. a) Įrodykite, kad jų sumos generuojančioji funkcija yra lygi atskirų atsitiktinių skaičių generuojančiųjų funkcijų sandaugai. b) Raskite sumos generuojančiąją funkciją, kai kiekvieno skaitmens k_i skirstinys yra binominis su tais pačiais parametrais.

4.13 A. d. (X, Y) tikimybės tankis $w(x,y)=\mathrm{A}(x+y)$, kai 0<x<1 ir 0<y<1. Raskite konstantą A. Ar atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra priklausomi? Raskite abipusės koreliacijos funkciją.

4.14 A. d. X yra tolygiai pasiskirstęs atkarpoje a) [0, 1]; b) [-1, 1]. A. d. $Y=X^2$. Raskite X ir Y abipusės koreliacijos koeficientą.

4.15 Ar funkcija

$$k(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\mathrm{ch}(\omega_0\tau)+\frac{\alpha}{\omega_0}\mathrm{sh}(\omega_0|\tau|)\right)\quad(\alpha>0,\omega_0>0)$$

visada tenkina autokoreliacijos funkcijos savybes?

4.16 $\eta(t)=F(t)\xi(t)$ yra nestacionarusis atsitiktinis vyksmas, kur $F(t)$ - neperiodinė žinoma funkcija, $\xi(t)$ - stacionarusis atsitiktinis vyksmas, kurio vidurkis (m_ξ) ir autokoreliacijos funkcija ($k_\xi(\tau)$) yra žinomi. Suraskite vyksmo $\eta(t)$ teorinio vidurkio ir autokoreliacijos funkcijos išraiškas.

4.17 $s(t)=\mathrm{A}\sin(\omega t+x)$ yra stacionarusis atsitiktinis vyksmas (A ir ω yra konstantos, x – atsitiktinė fazė tolygiai pasiskirsčiusi intervale (0, 2π)). Suraskite autokoreliacijos funkciją.

4.18 Gaminio vidutinis ilgis yra 90 cm, dispersija – 0,0225 cm^2. Taikydami Čebyševo nelygybę, įvertinkite tikimybę, kad a) gaminio ilgis absoliučiąja verte nenukryps nuo vidurkio daugiau kaip 0,4 cm, b) gaminio ilgis bus nuo 89,7 cm iki 90,3 cm.

4.19 Atsitiktinio dydžio skirstinys

X	1	4	6
P	0,2	0,3	0,5

Remiantis Čebyševo nelygybe, įvertinkite $P(|X-m_X|<4)$. Gautą įvertį palyginkite su tikslia tikimybės verte.

4.20 A. d. X aprašo skirstinys

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

Taikant Čebyševo nelygybę įvertinkite $P(|X - m_X| < 0{,}2)$.

4.21 Apskaičiuokite tikimybę $P\left(|X - m_X| < 3\sqrt{\sigma_X^2}\right)$ ir palyginkite tikrąją tikimybės vertę su įverčiu, gautu taikant Čebyševo nelygybę, kai a. d. X pasiskirstęs pagal a) normalųjį; b) rodiklinį ($w(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$); c) tolygųjį; d) eksponentinį skirstinius.

4.22 Įrenginys sudarytas iš dešimties nepriklausomai veikiančių elementų. Kiekvieno elemento sugedimo per laiko tarpą T tikimybė yra 0,05. Taikant Čebyševo nelygybę įvertinkite tikimybę, kad absoliutusis skirtumas tarp vidutiniškai sugendančių elementų ir sugedusių elementų per laiko tarpą T neviršija dviejų.

4.23 60 % gamyklos produkcijos yra pirmarūšiai gaminiai. Kokia tikimybė, kad tarp 500 atsitiktinai parinktų gaminių ne mažiau kaip 290 ir ne daugiau kaip 330 bus pirmarūšiai?

4.24 Tarkime, kad žmogaus žingsnių ilgiai yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai tolygiai pasiskirstę nuo 70 cm iki 80 cm. Kokia tikimybė, kad žmogus padaręs 10000 žingsnių, nueis atstumą ne mažesnį nei 7,49 km ir ne didesnį kaip 7,51 km?

4.25 Kokia tikimybė, kad stulpelyje atsitiktinai sudėtame iš šimto monetų herbu į viršų bus padėtos ne mažiau kaip 45 ir ne daugiau kaip 55 monetos?

4.26 Vienas procentas gaminių yra nekokybiški. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paėmus 1100 gaminių tarp jų nekokybiškų bus ne daugiau kaip 17?

4.27 Sėklų daigumas 90 %. Kokia tikimybė, kad iš 900 pasėtų sėklų sudygs nuo 790 iki 830?

4.28 Detalės ilgis – normalusis a. d., kurio skirstinys $w(x) = \frac{1}{0{,}2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-24{,}6)^2}{0{,}08}\right)$. Detalė atitinka techninius reikalavimus, jei jos ilgis patenką į intervalą [24, 25]. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paimta detalė atitiks techninius reikalavimus? Koks turi būti detalių skaičius, kad tarp jų su tikimybe 0,95 patektų bent viena reikalavimų neatitinkanti detalė?

4.29 Atsitiktiniai dydžiai X_1, X_2, …, X_n yra nepriklausomi ir turi tą patį Puasono (Poisson) skirstinį, kurio λ=2. Kam lygi tikimybė, kad sumos $S_{100} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$ vertė yra intervale nuo 190 iki 210?

4.30 Sudedame 10000 skaičių. Apvalinimo paklaidos yra tolygiai pasiskirsčiusios intervale (-0,005; 0,005). Raskite intervalą, į kurį su tikimybe ne mažesne kaip 0,99 pateks suminė paklaida.

4.31 Vienodai pasiskirsčiusių nepriklausomų atsitiktinių dydžių X_i ($i \in [1;\ n]$), kurių $M(X_i)$=0 ir $D(X_i)$=2, suma yra Y. Raskite tikimybę, kad atsitiktinis dydis $\frac{1}{3200}Y$ įgis vertes iš intervalo (2,95; 3,075), jei n=3200.

4.32 Draudimo kompanija apdraudė 1000 automobilių; draudimo įmoka – 150 Lt. Avarijos atveju išmokama 20000 Lt išmoka. Avarijos tikimybė yra 0,006. Apskaičiuokite tikimybę, kad a) kompanija turės nuostolių; b) kompanijos pelnas bus ne mažesnis nei 30000 Lt.

4.33 Atsitiktinio dydžio X skirstinys yra normalusis. Nustatyta, kad 15 % jo reikšmių patenka į intervalą (-∞; 12) ir 40 % - į intervalą (16,2; ∞). Raskite a. d. X vidurkį ir vidutinį kvadratinį nuokrypį.

4.34 Grupėje yra 30 studentų. Raskite tikimybę, kad nei vienas jų nėra gimęs sausio mėnesį. Apskaičiuokite tikslią tikimybę bei įvertinkite ją pagal Puasono (Poisson) dėsnį.

4.35 Šaulys šaudo į taikinį. a) Kiek kartų reikia šauti, kad pataikymų skaičiaus santykinis dažnis skirtųsi nuo tikimybės absoliutine verte ne didesne nei 0,4 su tikimybe 0,95? b) Raskite tokį ε, kad su tikimybe 0,99 santykinis dažnis skirtųsi nuo tikimybės su tikimybe 0,8 ne daugiau kaip ε atlikus 1000 bandymų.

4.36 Lošimo kauliukas metamas 200 kartų. Raskite ribas su tikimybe 0,95, kuriose bus šešių akučių atvirtimo skaičius.

4.37 Atsitiktinio dydžio X skirstinys yra normalusis, kurio parametrai m=10, σ=5. Raskite simetrinį m atžvilgiu intervalą, į kurį a. d. X patenka su tikimybe 0,9973.

5. MATEMATINĖ STATISTIKA

Imties plotis: $d = s_{\max} - s_{\min}$.

Imties centras: $c = \dfrac{s_{\max} + s_{\min}}{2}$.

Imties vidurkis – aritmetinis vidurkis: $\hat{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$;

(sugrupuotųjų duomenų: $\hat{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k} s_i n_i$).

Imties dispersija: $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \hat{X}\right)^2$;

(sugrupuotųjų duomenų: $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{k}\left(s_i - \hat{X}\right)^2 n_i$.

Imties standartinis nuokrypis:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \hat{X}\right)^2}.$$

Imties pradinis momentas: $\hat{m}_k = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^k$.

Imties centrinis momentas: $\hat{\mu}_k = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \hat{X}\right)^k$.

Imties asimetrijos koeficientas: $\hat{\gamma}_1 = \hat{\mu}_3 / \hat{\sigma}^3$.

Imties eksceso koeficientas: $\hat{\gamma}_2 = \hat{\mu}_4 / \hat{\sigma}^4 - 3$.

Imties koreliacijos funkcija:

$$\hat{k}_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_{ik} - \hat{X}_i\right)\left(X_{jk} - \hat{X}_j\right).$$

Mažiausių kvadratų metodas:

tiesinė aproksimacija: $y = \mathrm{a} + \mathrm{b}x$;

$$\mathrm{a} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right),$$

$$\mathrm{b} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i\right),$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix} = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.$$

Pavyzdžiai:

1. Lentelėje pateikti 16 metų merginų ūgio duomenys (1000 mergaičių). Naudodami χ^2 kriterijų su reikšmingumo lygmeniu 0,05 patikrinkite hipotezę, kad ūgis yra pasiskirstęs pagal normalųjį skirstinį.

x_i, x_{i+1}	n_i	Intervalo centras	Z_i	p_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
134-137	1	135,5	-∞	0,0087	0,0072
137-140	4	138,5			
140-143	16	141,5	-2,38		
143-146	53	144,5	-1,69	0,038	0,0042
146-149	121	147,5	-1,02	0,1084	0,0013
149-152	196	150,5	-0,34	0,213	0,0015
152-155	228	153,5	0,34	0,662	0,0064
155-158	185	156,5	1,02	0,213	0,0042
158-161	120	159,5	1,70	0,1093	0,00095
161-164	53	162,5	2,37	0,0355	0,0058
164-167	17	165,5,5	∞	0,0091	0,0084
167-170	5	168,5			
170-173	1	171,5			
Σ	1000			1,0012	0,03995

Sprendimas:

Galioja sąryšis: $\overline{y^*} = \dfrac{\overline{x^*} - 153{,}5}{3}$;

čia x_i^* yra intervalo centras; kiti pagalbiniai dydžiai apskaičiuojami pagal fomules:

$$y_i^* = \frac{x_i^* - 153{,}5}{3},$$

$\overline{y^*} = -0{,}004$, $\sigma_Y^2 = 2{,}168$,

$\overline{x^*} = 153{,}5 + 3\overline{y} = 153{,}49$, $\sigma_X^2 = 9\sigma_X^2 = 19{,}52$, $\sigma_x = 4{,}42$.

χ^2 kriterijaus statistika: $\chi_l^2 = \sum \dfrac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$, čia

$$p_i = \Phi_{0,6}(x_{i+1}) - \Phi_{-0,6}(x_i)$$
$$= \Phi_{0,1}\left(\frac{x_{i+1} - a}{\sigma}\right) - \Phi_{-0,1}\left(\frac{x_i - a}{\sigma}\right),$$

a=MX, $\sigma^2 = \mathrm{D}X$.

Įvertiname: $a = \overline{X}$, $\sigma^2 = \sigma_{nX}^2 = \dfrac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}\left(x_i - \overline{X}\right)^2$.

Dėl mažo duomenų skaičiaus apjungiame 3 pirmuosius ir 3 paskutiniuosius intervalus.

Apskaičiuojame $Z_i = \dfrac{x_i - \overline{X}}{\sigma_{nX}}$, laikydami, kad $Z_0 = -\infty$, $Z_9 = \infty$.

Apskaičiuojame p_i ir $\Phi(Z_i)$ (žr. lentelę). Atsižvelgiame, kad $(\Phi(z) + \Phi(-z) = 1)$.

Laisvės laipsnių skaičius randamas iš intervalų skaičiaus atėmus 1 ir įvertinus parametrų skaičių (=2). Taigi laisvės laipsnių skaičius yra 6. P1 priedo 4 lentelėje randame, kad $\chi_6^2(0{,}05) = 1{,}64$, t. y. kritinė sritis yra (1,64; ∞). Gautoji empirinė χ^2 vertė 0,03995 nepatenka į kritinę sritį, todėl hipotezė, kad merginų ūgio skirstinys yra normalusis, priimama.

2. E. Rezefordo (Ernest Rutherford) ir kolegų eksperimente buvo registruojamos radioaktyviosios dalelės, kurios per 7,5 s trukmės laiko intervalą, pasiekdavo skaitiklį. Buvo išmatuota 2590 intervalų. Matavimo rezultatai pateikti lentelėje, kur *i* yra dalelių skaičius, n_i – intervalų, per kuriuos skaitiklis užregistravo *i* dalelių, skaičius. Pasinaudoję χ^2 kriterijumi patikrinkite hipotezę, kad dalelių skaičius pasiskirstęs pagal Puasono (Poisson) skirstinį su reikšmingumo lygmeniu 0,05.

i	n_i	np_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
0	48	47,397	0,0077
1	191	189,847	0,0070
2	383	379,435	0,0335
3	509	506,086	0,0168
4	501	506,086	0,0511
5	409	404,817	0,0432
6	263	269,878	0,1722
7	161	154,105	0,3085
8	75	77,130	0,0588
9	35	34,188	0,0193
10	15	20,50	1,4756
Σ	2590		2,1937

Sprendimas:

Pagal pateiktus duomenis surandame:

$$\overline{X} = \frac{1}{2590}(0\cdot 48 + 1\cdot 191 + 2\cdot 383 + 3\cdot 508 + 4\cdot 501 + 5\cdot 409 + 6\cdot 263$$

$$+ 7\cdot 161 + 8\cdot 75 + 9\cdot 35 + 10\cdot 15) = \frac{10303}{2590} = 3{,}978,$$

$$\chi_8^2 = \sum \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 2{,}1937\,.$$

Laisvės laipsnių skaičius randamas iš intervalų skaičiaus atėmus 1 ir laikant, kad įvertintas parametras λ=4 (Puasono skirstinio vidurkis).

Kritinė sritis randama iš lentelės parinkus reikšmingumo lygmenį 0,05 – taigi kritinė sritis yra (11,070; ∞). Kadangi 2,1937 nepatenka į kritinę sritį, tai hipotezė yra priimtina.

Uždaviniai:

5.1 Bandymo rezultatai: 5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4. Užrašykite sutvarkytą imtį, suraskite verčių pasikartojimo dažnius ir santykinius dažnius.

5.2 Apskaičiuokite imties verčių santykinius dažnius:

a)

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

b)

x_i	2	3	4	5	7	10
n_i	3	1	2	3	4	2

5.3 Bandymo rezultatus pavaizduokite histograma:

a)

i	x_i- x_{i+1}	m_i
1	10-12	2
2	12-14	4
3	14-16	8
4	16-18	12
5	18-20	16
6	20-22	10
7	22-24	3

b)

i	x_i- x_{i+1}	m_i
1	0-2	20
2	2-4	30
3	4-6	50

5.4 Atlikus penkis strypo ilgio matavimus (sisteminės paklaidos nėra), gauti tokie rezultatai: 92, 94, 103, 105, 106. Raskite imties vidurkį ir dispersiją.

5.5 Šimto studentų ūgio matavimo rezultatai:

Ūgis	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
Studentų skaičius	10	14	26	28	12	8	2

Raskite imties vidurkį ir dispersiją.

5.6 Dviem prietaisais matuojamas ta pats fizikinis dydis. Prietaiso A rodmenys: 8, 9, 11, 12, prietaiso B: 5, 8, 13, 14. Apskaičiuokite matavimo imčių vidurkius, vidutinius kvadratinius nuokrypius ir dispersijas. Kuris prietaisas tikslesnis?

5.7 Telefonų stotyje stebima, kiek įvyksta klaidingų sujungimų per vieną minutę. 1 val. stebėjimo rezultatai: 3, 1, 3, 4, 2, 1, 2, 4, 0, 3, 0, 2, 2, 0, 2, 1, 4, 3, 3, 1, 4, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 0, 3, 4, 1, 3, 2, 7, 2, 0, 0, 1, 3, 3, 1, 2, 4, 2, 0, 2, 3, 1, 2, 5, 1, 1, 0, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 5. Raskite imties vidurkį ir dispersiją, tyrimo rezultatus palyginkite su Puasono (Poisson) skirstiniu.

5.8 Suraskite imties pasiskirstymo funkciją:

a)

x_i	n_i
1	10
4	15
6	25

b)

x_i	n_i
2	1
5	3
7	2
8	4

c)

x_i	n_i
4	5
7	2
8	3

5.9 Bandymo rezultatus aproksimuokite tiesine priklausomybe taikant mažiausiųjų kvadratų metodą:

a)

x_i	y_i
2	4,5
4	7,0
6	8,0
8	7,5
10	9,0

b)

x_i	y_i
0	66,7
4	71,0
10	76,3
15	80,6
21	85,7
29	92,9
36	99,4
51	113,6
68	125,1

5.10 Sudarykite atsitiktinių dydžių imtį:

a) paimkite 4 vienodus lošimo kauliukus ir meskite ne mažiau 50 kartų; užrašykite kiekvieno metimo keturių kauliukų atsivertusių akučių sumą x_i, kuri gali kisti nuo 4 iki 24;

b) bet kokiu būdu gaukite atsitiktinius sveikuosius skaičius, kintančius nuo 0 iki 9; susumuokite tokių keturių sekų skaičius imant po vieną iš kiekvienos sekos; imkite ne mažiau 50-ties tokių sumų.

Lentelėje surašykite bandymo duomenis; sudarykite duomenų pasikartojimo lentelę; nubraižykite stulpelinę diagramą ir histogramą; apskaičiuokite: imties plotį, imties centrą, imties medianą, imties vidurkį, imties dispersiją ir standartinį nuokrypį, imties asimetrijos koeficientą, nubrėžkite imties pasiskirstymo funkciją.

5.11 Paimkite bet kokio eksperimento (pvz., iš molekulinės fizikos ar mechanikos laboratorinių darbų), kurio duomenis galima aprašyti tiesine priklausomybe, rezultatus. Matavimo duomenų skaičius turi būti ne mažesnis už 8. Aproksimuokite eksperimento duomenis tiesine priklausomybe mažiausiųjų kvadratų metodu, suraskite tiesinės priklausomybės parametrus ir jų įvertinimo paklaidas (standartinius nuokrypius).

PRIEDAI

P1. A. D. SKIRSTINIAI

1) Išsigimęs: $w(x) = \delta(x-a)$; $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \le a; \\ 1, & \text{kai } x > a; \end{cases}$

$M(X) = a$, $D(X) = 0$.

2) Tolygusis: $w(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}, & \text{kai } \mathrm{a} \le x \le \mathrm{b}; \\ 0, & \text{kai } x < \mathrm{a}, x > \mathrm{b}; \end{cases}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \le \mathrm{a}; \\ \dfrac{x-\mathrm{a}}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}, & \text{kai } \mathrm{a} < x \le \mathrm{b}; \\ 1, & \text{kai } x > \mathrm{b}; \end{cases}$$

$$\Theta(u) = \frac{1}{\mathrm{b}-\mathrm{a}} \frac{e^{\mathrm{j}u\mathrm{b}} - e^{\mathrm{j}u\mathrm{a}}}{\mathrm{j}u};$$

$$M(X) = \frac{\mathrm{b}+\mathrm{a}}{2}, \; D(X) = \frac{(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}{12}.$$

3) Binominis: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$; $\Theta(u) = \left(pe^{ju} + q\right)^n$;

$\Psi(s) = (ps+q)^n$; $m = np$; $\sigma^2 = npq$;

moda: $k_0 = \begin{cases} (n+1)p - 1, \\ (n+1)p. \end{cases}$

4) Puasono (Poisson): $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$;

$\Theta(u) = e^{\lambda\left(e^{ju} - 1\right)}$;

$\Psi(s) = e^{-\lambda(1-s)}$; $m = \sigma^2 = \lambda$.

1 lentelė. Puasono skirstinio $\dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ reikšmės:

k	λ=0,1	λ=0,2	λ=0,3	λ=0,4	λ=0,5	λ=0,6
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929
2	0,00452	0,01637	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976
4		0,00005	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296
5			0,00002	0,00006	0,00016	0,00036
6					0,00001	0,00004

k	λ=0,7	λ=0,8	λ=0,9	λ=1,0	λ=2,0	λ=3,0
0	0,49659	0,44933	0,40657	0,36788	0,13534	0,04979
1	0,34761	0,35946	0,36591	0,36788	0,27067	0,14936
2	0,12166	0,14379	0,16466	0,18394	0,27067	0,22404
3	0,02839	0,03834	0,0494	0,06131	0,18045	0,22404
4	0,00497	0,00767	0,01111	0,01533	0,09022	0,16803
5	0,00070	0,00123	0,00200	0,00307	0,03609	0,10082
6	0,00008	0,00016	0,00030	0,00051	0,01203	0,05041
7		0,00002	0,00004	0,00007	0,00344	0,02160
8					0,00086	0,00810
9					0,00019	0,00270
10					0,00004	0,00081
11						0,00022
12						0,00006
13						0,00001

1 lentelė (tęsinys).

k	λ=4,0	λ=5,0	λ=6,0	λ=7,0	λ=8,0	λ=9,0
0	0,01832	0,00674	0,00248	0,00091	0,00034	0,00012
1	0,07326	0,03369	0,01487	0,00638	0,00268	0,00111
2	0,14653	0,08422	0,04462	0,02234	0,01073	0,00500
3	0,19537	0,14037	0,08924	0,05213	0,02863	0,01499
4	0,19537	0,17547	0,13385	0,09123	0,05725	0,03374
5	0,15629	0,17547	0,16062	0,12772	0,09160	0,06073
6	0,10420	0,14622	0,16062	0,14900	0,12214	0,09109
7	0,05954	0,10444	0,13768	0,14900	0,13959	0,11712
8	0,02977	0,06528	0,10326	0,13038	0,13959	0,13176
9	0,01323	0,03627	0,06884	0,10140	0,12408	0,13176
10	0,00529	0,01813	0,0413	0,07098	0,09926	0,11858
11	0,00192	0,00824	0,02253	0,04517	0,07219	0,09702
12	0,00064	0,00343	0,01126	0,02635	0,04813	0,07277
13	0,00020	0,00132	0,0052	0,01419	0,02962	0,05038
14	0,00006	0,00047	0,00223	0,00709	0,01692	0,03238
15	0,00002	0,00016	0,00089	0,00331	0,00903	0,01943
16		0,00005	0,00033	0,00145	0,00451	0,01093
17		0,00001	0,00012	0,00060	0,00212	0,00579
18			0,00004	0,00023	0,00094	0,00289
19			0,00001	0,00009	0,00040	0,00137
20				0,00003	0,00016	0,00062
21					0,00006	0,00026
22					0,00002	0,00011
23						0,00004
24						0,00002

5) Eksponentinis: $w(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0;\end{cases}$

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0;\end{cases} \quad m=\frac{1}{\lambda};\ \sigma^2=\frac{1}{\lambda^2}.$$

6) Relėjaus (Rayleigh): $w(x)=\frac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$,

$$F(x)=1-\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),\ x\geq 0.$$

7) Normalusis (Gauso (Gauss)):

$$w(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right];$$

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]dx;$$

$$\Theta(u)=e^{jum-\frac{1}{2}u^2\sigma^2};$$

$$P(\mathrm{a}\leq X<\mathrm{b})=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]dx$$

$$=\Phi\left(\frac{\mathrm{b}-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mathrm{a}-m}{\sigma}\right);$$

Funkcijų

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]\ (\varphi(-z)=\varphi(z)),$$

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}\exp\left[-\frac{(x)^2}{2}\right]dx\ \ (\Phi(z)+\Phi(-z)=1)$$

reikšmės pateiktos 2 lentelėje.

2 lentelė. Normaliojo skirstinio funkcijų reikšmės.

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,5000	0,30	0,3814	0,6179
01	3989	5040	31	3802	6217
02	3989	5080	32	3790	6265
03	3988	5120	33	3778	6293
04	3986	5160	34	3765	6331
05	3984	5199	35	3752	6368
06	3982	5239	36	3739	6406
07	3980	5279	37	3725	6443
08	3977	5319	38	3712	6480
09	3973	5359	39	3697	6517
0,10	0,3970	0,5398	0,40	0,3683	0,6557
11	3965	5438	41	3668	6591
12	3961	5478	42	3653	6628
13	3956	5517	43	3637	6664
14	3951	5557	44	3621	6700
15	3945	5596	45	3605	6736
16	3939	5636	46	3589	6772
17	3932	5675	47	3572	6808
18	3925	5714	48	3555	6844
19	3918	5753	49	3538	6879
0,20	0,3910	0,5793	0,50	0,3521	0,6915
21	3902	5832	51	3503	6950
22	3894	5871	52	3485	6985
23	3885	5910	53	3467	7019
24	3876	5948	54	3448	7054
25	3867	5987	55	3429	7088
26	3857	6026	56	3410	7123
27	3847	6064	57	3391	7157
28	3836	6103	58	3372	7190
29	3825	6414	59	3352	7224

2 lentelė (tęsinys).

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,60	0,3332	0,7257	0,90	0,2661	0,859
61	3312	7291	91	2637	8186
62	3292	7324	92	2613	8212
63	3271	7357	93	2589	8238
64	3251	7389	94	2565	8264
65	3230	7422	95	2541	8289
66	3209	7454	96	2516	8315
67	3187	7486	97	2492	8340
68	3166	7517	98	2468	8365
69	3144	7549	99	2444	8389
0,70	0,3123	0,7580	1,00	0,2420	0,8413
71	3101	7611	01	2396	8438
72	3079	7642	02	2371	8461
73	3056	7673	03	2347	8485
74	3034	7703	04	2323	8508
75	3011	7734	05	2299	8531
76	2989	7764	06	2275	8554
77	2966	7794	07	2251	8577
78	2943	7823	08	2227	8599
79	2920	7852	09	2203	8621
0,80	0,2897	0,7881	1,10	0,2179	0,8643
81	2874	7910	11	2155	8665
82	2850	7939	12	2132	8686
83	2827	7967	13	2107	8708
84	2803	7995	14	2083	8729
85	2780	8023	15	2059	8749
86	2756	8051	16	2036	8770
87	2732	8078	17	2012	8790
88	2709	8106	18	1989	8810
89	2685	8133	19	1965	8830

2 lentelė (tęsinys).

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
1,20	0,1942	0,8849	1,50	0,1295	0,9332
21	1919	8869	51	1276	9345
22	1895	8888	52	1257	9357
23	1872	8907	53	1238	9370
24	1842	8925	54	1219	9382
25	1826	8944	55	1200	9394
26	1804	8962	56	1182	9406
27	1881	8980	57	1163	9418
28	1858	8997	58	1145	9429
29	1836	9015	59	1127	9441
1,30	0,1714	0,9032	1,60	0.1109	0,9452
31	1691	9049	61	1092	9463
32	1669	8066	62	1074	9474
33	1647	9082	63	1057	9484
34	1626	9099	64	1040	9495
35	1604	9115	65	1023	9505
36	1582	9131	66	1006	9515
37	1561	9147	67	0989	9525
38	1539	9162	68	0973	9535
39	1518	9177	69	0957	9545
1,40	0,1497	0,9192	1,70	0,0940	0,9554
41	1476	9207	71	0925	9564
42	1456	9222	72	0909	9573
43	1435	9236	73	0893	9583
44	1415	9251	74	0878	9591
45	1394	9265	75	0863	9599
46	1374	9279	76	0848	9608
47	1354	9292	77	0833	9616
48	1334	9306	78	0818	9625
49	1315	9319	79	0804	9633

2 lentelė (tęsinys).

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
1,80	0,0790	0,9641	2,20	0,0355	0,9861
81	0775	9649	22	0339	9868
82	0761	9656	24	0325	8975
83	0748	9664	26	0310	9881
84	0734	9671	28	0297	9887
85	0721	9678	30	0283	9893
86	0707	9686	32	0270	9898
87	0694	9693	34	0258	9904
88	0681	9699	36	0246	9909
89	0669	9706	38	0235	9913
1,90	0,0656	0,9713	2,40	0,0224	0,9918
91	0644	9719	42	0213	9922
92	0632	9729	44	0203	9927
93	0620	9732	46	0194	9931
94	0608	9738	48	0184	9934
95	05%	9744	50	0175	9938
96	0584	9750	52	0167	9941
97	0573	9756	54	0158	9945
98	9562	9761	56	0151	9948
99	0551	9767	58	0143	9951
2.00	0,0540	0,9772	2,60	0.0136	0.9953
02	0519	9783	62	0129	9956
04	0498	9793	64	0122	9959
06	0478	9803	66	0116	9961
08	0459	9812	68	0110	9963
10	0440	9821	70	0104	9965
12	0422	9830	72	0099	9967
14	0404	9838	74	0093	9969
16	0387	9846	76	0088	9971
18	0371	9854	78	0084	9973

2 lentelė (tęsinys).

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
2,80	0,0079	0,9974	3,00	0,00443	0,99665
82	0075	9976	3,10	00327	99903
84	0071	9977	3,20	00238	99931
86	0097	9979	3,30	00172	99951
88	0093	9980	3,40	00123	99966
90	0060	9981	3,50	00087	99976
92	0056	9982	3,60	00061	99984
94	0053	9984	3,70	00042	99989
96	0050	9985	3,80	00029	99993
98	0047	9986	3,90	00020	99995
			4,00	0,0001338	0,999968
			4,50	0000160	999997
			5,00	0000015	99999997

8) Stjudento (Student's): $w(x,n)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$,

n – laisvės laipsnių skaičius;

Gamos funkcija: $\Gamma(\alpha+1)=\int\limits_0^\infty e^{-t}\,t^\alpha\,dt$,

$\Gamma(n+\alpha+1)=(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)\Gamma(\alpha+1)\ (\alpha+1)$

$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\dfrac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\approx1{,}77$;

9) χ^2: $w_{\chi^2}=\dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\chi^2\right)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$,

3 lentelė. Stjudento skirstinio kvantiliai: $P\left(X_n < x_p(n)\right)=p$.

n	p=0,750	p=0,900	p=0,950	p=0,990	p=0,999
1	1,000	3,078	6,314	31,821	318
2	0,816	1,886	2,920	6,965	22,3
3	765	638	2,353	4,541	10,2
4	741	533	2,132	3,747	7,173
5	727	476	2,015	3,365	5,893
6	718	440	1,943	3,143	5,208
7	711	415	895	2,998	4,785
8	706	397	860	896	4,501
9	703	383	833	821	4,297
10	700	372	812	764	4,144
11	697	363	796	718	4,025
12	695	356	782	681	3,930
13	694	350	771	650	852
14	692	345	761	624	787
15	691	341	753	602	733
16	690	337	746	583	686
17	689	333	740	567	646
18	688	330	734	552	610
19	688	328	729	539	579
20	687	325	725	528	552
21	686	323	721	518	527
22	686	321	717	508	505
23	685	319	714	500	485
24	685	318	711	492	467
25	684	316	708	485	450
30	683	310	697	457	385
40	681	303	684	423	307
60	679	296	671	390	232
120	677	289	658	358	160
∞	674	272	645	326	90

$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – nepriklausomi normalieji a. d.;

$M(\chi^2) = n$;

4 lentelė. χ^2 skirstinio kvantiliai : $P(\mathrm{X}_n^2 < \chi_p^2(n)) = p$.

n	p=0,005	p=0,010	p=0,05	p=0,10	p=0,20	p=0,30
1	-	-	-	0,0158	0,0642	0,148
2	0,0100	0,0201	0,103	0,211	0,446	0,713
3	0,0717	0,115	0,352	0,584	1,00	1,42
4	0,207	0,297	0,711	1,06	1,65	2,19
5	0,412	0,554	1,15	1,61	2,34	3,00
6	0,676	0,872	1,64	2,20	3,07	3,83
7	0,989	1,24	2,17	2,83	3,82	4,67
8	1,34	1,65	2,73	3,49	4,59	5,53
9	1,73	2,09	3,33	4,17	5,38	6,39
10	2,16	2,56	3,94	4,87	6,18	7,27
11	2,60	3,05	4,57	5,58	6,99	8,15
12	3,07	3,57	5,23	6,30	7,81	9,03
13	3,57	4,11	5,89	7,04	8,63	9,93
14	4,07	4,66	6,57	7,79	9,47	10,8
15	4,60	5,23	7,26	8,55	10,3	11,7
16	5,14	5,81	7,96	9,31	11,2	12,6
17	5,70	6,41	8,67	10,1	12,0	13,5
18	6,26	7,01	9,39	10,9	12,9	14,4
19	6,84	7,63	10,1	11,7	13,7	15,4
20	7,43	8,26	10,9	12,4	14,6	16,3
21	8,03	8,90	11,6	13,2	15,4	17,2
22	8,64	9,54	12,3	14,0	16,3	18,1
23	9,26	10,2	13,1	14,8	17,2	19,0

4 lentelė (tęsinys).

n	p=0,005	p=0,010	p=0,05	p=0,10	p=0,20	p=0,30
24	9,89	10,9	13,8	15,7	18,1	19,9
25	10,5	11,5	14,6	16,5	18,9	20,9
26	11,2	12,2	15,4	17,3	19,8	21,8
27	11,8	12,9	16,2	18,1	20,7	22,7
28	12,5	13,6	16,8	18,9	21,6	23,6
29	13,1	14,3	17,7	19,8	22,5	24,6
30	13,8	15,0	18,5	20,6	23,4	25,5
35	17,2	18,5	22,5	24,8	27,8	30,2
40	20,7	22,2	26,5	29,1	32,3	34,9
45	24,3	25,9	30,6	33,4	36,9	39,6
50	28,0	29,7	34,8	37,7	41,4	44,3
75	47,2	49,5	56,1	59,8	64,5	68,1
100	67,3	70,1	77,9	82,4	87,9	92,1

n	p=0,70	p=0,80	p=0,90	p=0,95	p=0,990	p=0,999
1	1,07	1,64	2,71	3,84	6,63	10,8
2	2,41	3,22	4,61	5,99	9,21	13,8
3	3,67	4,64	6,25	7,81	11,3	16,3
4	4,88	5,99	7,78	9,49	13,3	18,5
5	6,06	7,29	9,24	11,1	15,1	20,5
6	7,23	8,56	10,6	12,6	16,8	22,5
7	8,38	9,80	12,0	14,1	18,5	24,3
8	9,52	11,0	13,4	15,5	20,1	26,1
9	10,7	12,2	14,7	16,9	21,7	27,9
10	11,8	13,4	16,0	18,3	23,2	29,6
11	12,9	14,6	17,3	19,7	24,7	31,3
12	14,0	15,8	18,5	21,0	26,2	32,9
13	15,1	17,0	19,8	22,4	27,7	34,5
14	16,2	18,2	21,1	23,7	29,1	36,1
15	17,3	19,3	22,3	25,0	30,6	37,7
16	18,4	20,5	23,5	26,3	32,0	39,3

4 lentelė (tęsinys).

n	p=0,70	p=0,80	p=0,90	p=0,95	p=0,990	p=0,999
17	19,5	21,6	24,8	37,6	33,4	40,8
18	20,6	22,8	26,0	28,9	34,8	42,3
19	21,7	23,9	27,2	30,1	36,2	43,8
20	22,8	25,0	28,4	31,4	37,6	45,3
21	23,9	26,9	29,6	32,7	38,9	46,8
22	24,9	27,3	30,8	33,9	40,3	48,3
23	26,0	28,4	32,0	35,2	41,6	49,7
24	27,1	29,6	33,2	36,4	43,0	51,2
25	28,2	30,7	34,1	37,7	44,3	52,6
26	29,2	31,8	35,6	38,9	45,6	54,1
27	30,3	32,9	36,7	40,1	47,0	55,5
28	31,4	34,0	37,9	41,3	48,3	56,9
29	32,5	35,1	39,1	42,6	49,6	58,3
30	33,5	36,3	40,3	43,8	50,9	59,7
35	38,9	41,8	46,1	49,8	57,3	66,6
40	44,2	47,3	51,8	55,8	63,7	73,4
45	49,5	52,7	57,5	61,7	70,0	80,1
50	54,7	58,2	63,2	67,5	76,2	86,7
75	80,9	85,1	91,1	96,2	106,4	118,6
100	106,9	111,7	118,5	124,3	135,6	149,4

P2. KOMPLEKSINIAI SKAIČIAI

$$z = x + jy = r(\cos\alpha + j\sin\alpha) = re^{j\alpha};$$

$$\left|e^{j\alpha}\right| = |\cos\alpha + j\sin\alpha| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1.$$

P3. TRIGONOMETRIJOS FORMULĖS

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

P4. FURJĖ (FOURIER) TRANSFORMACIJA

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-jxy}dx, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{jxy}dy.$$

P5. EILUTĖS

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

P6. INTEGRAVIMAS DALIMIS

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

P7. INTEGRALAI

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\beta x}\mathrm{d}x = \frac{n!}{\beta^{n+1}}$$, n – sveikasis skaičius;

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\beta};$$

$$\int_0^{\infty} xe^{-\beta x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\beta^2};$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-\beta x}\mathrm{d}x = \frac{2}{\beta^3};$$

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-\beta x}\mathrm{d}x = \frac{6}{\beta^4};$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\beta x^2}\mathrm{d}x = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\beta^{\frac{n+1}{2}}}$$, n – sveikasis skaičius;

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-\beta x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{2^n}\,\frac{1}{\beta^{n+1/2}}$$, n – sveikasis skaičius;

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-\beta x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\frac{1}{\beta^{3/2}};$$

$$\int_0^\infty x^4e^{-\beta x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{3\sqrt{\pi}}{8}\,\frac{1}{\beta^{5/2}};$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-\beta x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\,\frac{n!}{\beta^{n+1}}$$, n – sveikasis skaičius;

$$\int_0^\infty xe^{-\beta x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\beta};$$

$$\int_0^\infty x^3e^{-\beta x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\beta^2};$$

$$\int_0^\infty x^5e^{-\beta x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\beta^3};$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}e^{-|a|};$$

$$\int x^m\sin^n x\,\mathrm{d}x=\frac{x^{m-1}\sin^{n-1}x}{n^2}\left[m\sin x-nx\cos x\right]$$
$$+\frac{n-1}{n}\int x^m\sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x-\frac{m(m-1)}{n^2}\int x^{m-2}\sin^n x\,\mathrm{d}x;$$

$$\int x^m\cos^n x\,\mathrm{d}x=\frac{x^{m-1}\cos^{n-1}x}{n^2}\left[m\cos x+nx\sin x\right]$$
$$+\frac{n-1}{n}\int x^m\cos^{n-2}x\,\mathrm{d}x-\frac{m(m-1)}{n^2}\int x^{m-2}\cos^n x\,\mathrm{d}x;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}x}=\ln\left(\mathrm{th}\,\frac{x}{2}\right);$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}x}=\mathrm{artg}(\mathrm{sh}x)=2\mathrm{arctg}\left(e^x\right)=\arcsin(\mathrm{th}x).$$

P8. RIBOS

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}-1}{x}=\beta;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}-1-\beta x}{x^2}=\frac{\beta^2}{2};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}-1-\frac{(\beta x)^2}{2}}{x^3}=\frac{\beta^3}{6}.$$

P9. KITA

$$\mathrm{ch}(x)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right),\qquad \mathrm{sh}(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right).$$