

## Įvadas

Paskaitų temos

(1)

Paskaitų temos

(2)

Literatūra

Papildoma

literatūra

Atsiskaitymas ir

vertinimas

Referatas:

Ampero dėsnis

Informacija

Elektrodinamikos

istorijos faktai

Kaip vertinama

elektrodinamika

pasaulyje?

Literatūra

# Elektrodinamika

## Įvadas

## Paskaitų temos (1)

Įvadas

Paskaitų temos  
(1)

Paskaitų temos  
(2)

Literatūra

Papildoma  
literatūra

Atsiskaitymas ir  
vertinimas

Referatas:

Ampero dėsnis

Informacija

Elektrodinamikos  
istorijos faktai

Kaip vertinama  
elektrodinamika  
pasaulyje?

Literatūra

1. Maksvelio lygtys ir jų fizikinė prasmė
2. Krūvio tvermės dėsnis ir srovės tolydumo lygtis
3. Elektromagnetinės medžiagų savybės
4. Elektromagnetinio lauko vektorių kraštinės sąlygos
5. Pointingo teorema. Elektromagnetinio lauko energija
6. Maksvelio lygtys kompleksiniame pavidale. Kompleksinė skvarba
7. Pointingo teorema harmoniškai kintančiam elektromagnetiniam laukui

## Paskaitų temos (2)

Įvadas

Paskaitų temos  
(1)

Paskaitų temos  
(2)

Literatūra

Papildoma  
literatūra

Atsiskaitymas ir  
vertinimas

Referatas:

Ampero dėsnis

Informacija

Elektrodinamikos  
istorijos faktai

Kaip vertinama  
elektrodinamika  
pasaulyje?

Literatūra

8. Elektromagnetinio lauko vektorių lygtys
9. Apibendrintos plokščiosios elektromagnetinės bangos
10. Harmoninės plokščiosios elektromagnetinės bangos poliarizacija
11. Elektrodinaminiai potencialai
12. Herco vektoriai
13. Elektrinis ir magnetinis dipoliai
14. Elementarieji elektrinis ir magnetinis spinduoliai

## Literatūra

Įvadas

Paskaitų temos  
(1)

Paskaitų temos  
(2)

Literatūra

Papildoma  
literatūra

Atsiskaitymas ir  
vertinimas

Referatas:

Ampero dėsnis

Informacija

Elektrodinamikos  
istorijos faktai

Kaip vertinama  
elektrodinamika  
pasaulyje?

Literatūra

- A. Matulis. Elektrodinamika, Vilnius, Virtuali leidykla-knygynas, 2001
- S. Mickūnas, Elektromagnetiniai laukai ir bangos, Technologija, 2004
- W.K.H. Panofsky, M. Phillips, Classical electricity and magnetism, 2Ed, Dover Publications, 2005
- J.B. Westgard, Electrodynamics: a concise introduction, Springer, 1997
- E.J. Rothwell, M.J. Cloud, Electromagnetics, CRC Press, 2001/2008
- J.D. Jackson, Classical electrodynamics, 3Ed, Wiley, 1999
- J.A. Stratton, Electromagnetic theory, Wiley-IEEE, 2007
- J. Schwinger et al, Classical electrodynamics, Perseus Books, 1998
- D.J. Griffiths, Introduction to electrodynamics, 3Ed, Prentice Hall, 1999
- M. Born, E. Wolf, and A.B. Bhatia, Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light, Cambridge University Press, 1999

## Papildoma literatūra

- V. Kybartas, V. Šugurovas. Elektrodinamika, Vilnius: Mokslas, 1977
- V.V. Nikolskij, T.I. Nikolskaya, Elektrodinamika i rasprostranenie radiovoln, Moskva: Nauka, 1989 (rusiškai)

Įvadas

Paskaitų temos  
(1)

Paskaitų temos  
(2)

Literatūra

Papildoma  
literatūra

Atsiskaitymas ir  
vertinimas

Referatas:

Ampero dėsnis

Informacija

Elektrodinamikos  
istorijos faktai

Kaip vertinama  
elektrodinamika  
pasaulyje?

Literatūra

# Atsiskaitymas ir vertinimas

Įvadas

Paskaitų temos  
(1)

Paskaitų temos  
(2)

Literatūra

Papildoma  
literatūra

Atsiskaitymas ir  
vertinimas

Referatas:

Ampero dėsnis

Informacija

Elektrodinamikos  
istorijos faktai

Kaip vertinama  
elektrodinamika  
pasaulyje?

Literatūra

Kontroliniai darbai:

- 2 paskaita: žinių įvertinimas, Elektra ir magnetizmas (V. Rinkevičiaus vadovėlis)
- 1 kontrolinis – po pusės kurso
- 2 kontrolinis – kurso pabaigoje

Referatas – iki semestro pabaigos. Tema: Ampero dėsnis

Egzaminas: atsakymai į klausimus raštu ir pokalbis, galimybė pagerinti pažymį

Pažymio sudėtis:

- 70% kontroliniai darbai
- 10% referatai
- 20% pokalbis

# Referatas: Ampero dėsnis

Susiję klausimai:

- Jėgos veikiančios tarp srovės elementų
- Ampero dėsnis ir Maksvelio lygtys
- Integralinė Ampero dėsnio išraiška
- Ampero dėsnis ir III-iasis Niutono dėsnis
- Judesio kiekio momento tvermės dėsnis elektromagnetiniam laukui

Nurodyti naudotą literatūrą. Apimtis: 3-4 ranka rašyti A4 formato puslapiai.

Literatūra:

1. D.J. Griffiths, Introduction to electrodynamics, 3Ed, Prentice Hall, 1999
2. W.K.H. Panofsky, M. Phillips, Classical electricity and magnetism, 2Ed, Dover Publications, 2005
3. J.A. Stratton, Electromagnetic theory, Wiley-IEEE, 2007
4. E.J. Rothwell, M.J. Cloud, Electromagnetics, CRC Press, 2001/2008
5. J. Schwinger et al, Classical electrodynamics, Perseus Books, 1998

Įvadas

Paskaitų temos

(1)

Paskaitų temos

(2)

Literatūra

Papildoma

literatūra

Atsiskaitymas ir

vertinimas

Referatas:

Ampero dėsnis

Informacija

Elektrodinamikos

istorijos faktai

Kaip vertinama

elektrodinamika

pasaulyje?

Literatūra

# Informacija

Ivadas

Paskaitų temos

(1)

Paskaitų temos

(2)

Literatūra

Papildoma

literatūra

Atsiskaitymas ir  
vertinimas

Referatas:

Ampero dėsnis

**Informacija**

Elektrodinamikos  
istorijos faktai

Kaip vertinama  
elektrodinamika  
pasaulyje?

Literatūra

Paskaitų skaidrės: [www.webolab.net/elektrodinamika](http://www.webolab.net/elektrodinamika)

El. paštas: [rimvydas.aleksiejunas@ff.vu.lt](mailto:rimvydas.aleksiejunas@ff.vu.lt)



## Elektrodinamikos istorijos faktai

Ivadas

Paskaitų temos  
(1)

Paskaitų temos  
(2)

Literatūra

Papildoma

literatūra

Atsiskaitymas ir  
vertinimas

Referatas:

Ampero dėsnis

Informacija

**Elektrodinamikos  
istorijos faktai**

Kaip vertinama  
elektrodinamika  
pasaulyje?

Literatūra

<b>600 p.m.e.</b>	Graikas <b>Talis iš Mileto</b> pastebėjo, kad gintaras traukia šiaudus
...	...
<b>1771</b>	Kavendišo elektrostatikos eksperimentai, talpos ir varžos idėjos
<b>1785</b>	Išspausdinti Kulono darbai, elektrostatinės jėgos dėsnis
<b>1820</b>	Bio ir Savaro dėsnis, nuolatinė srovė ir magnetinis laukas
<b>1825</b>	Amperas išspausdina darbus apie magnetizmą, nustatytas srovės kuriamas magnetinis laukas
~ <b>1835</b>	Faradėjus tyrinėja laike kintančias sroves ir magnetinius laukus
<b>1864</b>	Maksvelio lygtys
<b>1888</b>	Hercas atranda plokščias elektromagnetines bangas
<b>1895/05/07</b>	Popovas pristato aparatą elektriniams virpesiams registruoti

Plačiau: [Wikipedia – Elektromagnetizmo istorija.](#)

# Kaip vertinama elektrodinamika pasaulyje?



Faradėjus  
1788 – 1258



Franklinas  
1706 – 1790



Gausas  
1777 – 1855



Markonis  
1874 – 1937



Oerstedas  
1777 – 1851



Volta  
1745 – 1827



Tesla  
1856 – 1943

# Literatūra



Įvadas

Paskaitų temos

(1)

Paskaitų temos

(2)

Literatūra

Papildoma

literatūra

Atsiskaitymas ir  
vertinimas

Referatas:

Ampero dėsnis

Informacija

Elektrodinamikos  
istorijos faktai

Kaip vertinama  
elektrodinamika  
pasaulyje?

Literatūra

## Vektorinė algebra

Vektorių  
sandauga  
Diferencialiniai  
operatoriai  
Gradientas  
Divergencija  
Rotorius  
Diferencialinės  
tapatybės  
Diferencialiniai  
operatoriai  
cilindrinėse  
koordinatėse  
Diferencialiniai  
operatoriai  
sferinėse  
koordinatėse  
Cilindrinės ir  
sferinės  
koordinatės  
Dekarto –  
cilindrinės  
Dekarto – sferinės  
Cilindrinės –  
sferinės  
Integralinės  
teoremos  
Literatūra

# Vektorinė algebra

# Vektorių sandauga

Skaliarinė ir vektorinė sandaugos:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \alpha, \quad \leftarrow \text{Skaliarinė sandauga (angl. dot product)}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{n}_0 AB \sin \alpha, \quad \leftarrow \text{Vektorinė sandauga (angl. cross product)}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z,$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

Sandaugos tapatybės:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}),$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}),$$

$$|\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|^2 + |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2,$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}),$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{D}]\mathbf{C} - [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}]\mathbf{D}.$$

Vektorinė algebra

Vektorių  
sandauga

Diferencialiniai  
operatoriai

Gradientas

Divergencija

Rotorius

Diferencialinės  
tapatybės

Diferencialiniai  
operatoriai

cilindrinėse

koordinatėse

Diferencialiniai  
operatoriai

sferinėse

koordinatėse

Cilindrinės ir

sferinės

koordinatės

Dekarto –

cilindrinės

Dekarto – sferinės

Cilindrinės –

sferinės

Integralinės

teoremos

Literatūra

# Diferencialiniai operatoriai

Vektorinė algebra

Vektorių  
sandauga

Diferencialiniai  
operatoriai

Gradientas

Divergencija

Rotorius

Diferencialinės  
tapatybės

Diferencialiniai  
operatoriai

cilindrinėse  
koordinatėse

Diferencialiniai  
operatoriai

sferinėse  
koordinatėse

Cilindrinės ir  
sferinės

koordinatės  
Dekarto –  
cilindrinės

Dekarto – sferinės

Cilindrinės –  
sferinės

Integralinės  
teoremos

Literatūra

Gradientas

$$\text{grad } \psi \equiv \nabla \phi = \mathbf{x}_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

Divergencija

$$\text{div } \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

Rotorius (*angl.* curl)

$$\text{rot } \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix},$$

Laplaso operatorius

$$\text{div grad } \psi \equiv \nabla^2 \psi \equiv \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2},$$
$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{x}_0 \nabla^2 A_x + \mathbf{y}_0 \nabla^2 A_y + \mathbf{z}_0 \nabla^2 A_z.$$

Geras įvadas į vektorinę analizę ir diferencialinius skaičiavimus pateikiamas [Griffiths, 1999] knygos pirmajame skyriuje.

# Gradientas

Gradientas apibrėžiamas skaliarinei funkcijai  $\varphi$ , kuri kinta erdvėje kaip kelių kintamųjų funkcija  $\varphi = \varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x, y, z)$ . Tokios funkcijos pokytį nusako pilnutinis diferencialas, išreiškiamas dalinėmis išvestinėmis:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz.$$

Čia dalinės išvestinės  $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$  parodo funkcijos  $\varphi$  pokytį išilgai kiekvienos koordinačių ašies.

Vieno kintamojo funkcijos išvestinė leidžia nustatyti minimumo, maksimumo ir perlanko taškus. Kelių kintamųjų funkcijos atveju išvestinė gali parodyti ir kryptį – tai kryptinė išvestinė arba *gradientas*

$$\text{grad } \varphi \equiv \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{x}_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{y}_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{z}_0. \quad (1)$$

Vektorinė algebra

Vektorių  
sandauga

Diferencialiniai  
operatoriai

Gradientas

Divergencija

Rotorius  
Diferencialinės  
tapatybės

Diferencialiniai  
operatoriai  
cilindrinėse  
koordinatėse  
Diferencialiniai  
operatoriai  
sferinėse

koordinatėse  
Cilindrinės ir  
sferinės

koordinatės  
Dekarto –  
cilindrinės

Dekarto – sferinės

Cilindrinės –  
sferinės

Integralinės  
teoremos

Literatūra

## Geometrinė gradiento operatoriaus interpretacija

Skaliarinės funkcijos  $\varphi$  gradientas  $\text{grad } \varphi$  yra vektorius, kurio kryptis parodo maksimalaus funkcijos didėjimo kryptį, o modulis  $|\text{grad } \varphi|$  nusako funkcijos polinkį (didėjimo greitį) išilgai maksimumo krypties.

Funkcijos  $\varphi$  pokytį (pilnutinį diferencialą) galima išreikšti gradiento ir elementaraus kelio ilgio vektoriaus  $d\mathbf{l}$  skaliarine sandauga:

$$\begin{aligned}d\varphi &= \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{x}_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{y}_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{z}_0 \right) \cdot (dx \mathbf{x}_0 + dy \mathbf{y}_0 + dz \mathbf{z}_0) \\ &= |\text{grad } \varphi| \cdot |d\mathbf{l}| \cos \theta,\end{aligned}$$

čia  $\theta$  – kampas tarp vektorinio kelio elemento  $d\mathbf{l}$  ir gradiento  $\text{grad } \varphi$  vektoriaus. Iš šios formulės matyti, kad funkcijos  $\varphi$  pokytis  $d\varphi$  bus maksimalus išilgai  $\text{grad } \varphi$  krypties, t.y. kai kampas  $\theta = 0$ .

Nulinis gradientas  $\text{grad } \varphi = 0$  reiškia ypatinguosius (ekstremumo) taškus, kuriuose funkcija  $\varphi$  įgyja maksimalias, minimalias reikšmes arba yra balno (perlinkio) taške.

Vektorinė algebra

Vektorių

sandauga

Diferencialiniai  
operatoriai

Gradientas

Divergencija

Rotorius

Diferencialinės  
tapatybės

Diferencialiniai  
operatoriai

cilindrinėse

koordinatėse

Diferencialiniai  
operatoriai

sferinėse

koordinatėse

Cilindrinės ir

sferinės

koordinatės

Dekarto –

cilindrinės

Dekarto – sferinės

Cilindrinės –

sferinės

Integralinės

teoremos

Literatūra



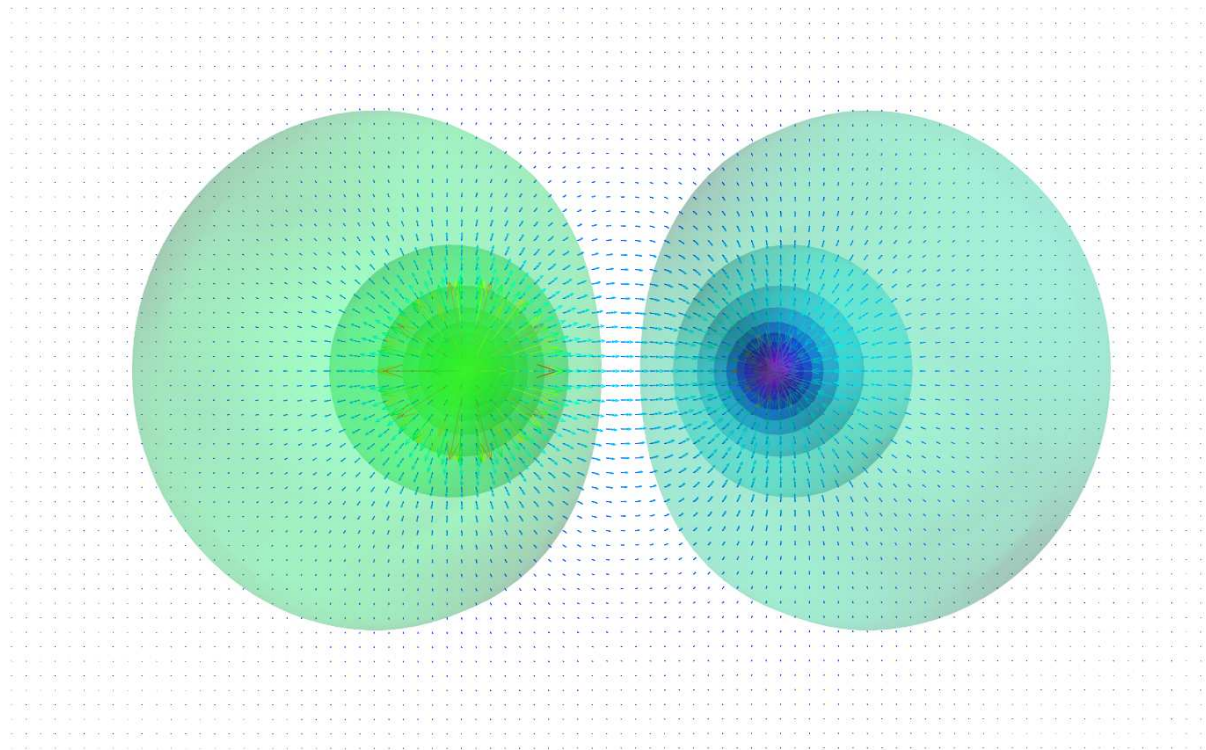
## Dviejų taškinių krūvių elektrostatinis laukas

Dviejų taškinių krūvių  $q$  ir  $-q$  kuriamas elektrostatinis potencialas:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} \right),$$

o elektrinis laukas aprašomas gradientu:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \varphi(\mathbf{r}).$$



Vektorinė algebra

Vektorių  
sandauga

Diferencialiniai  
operatoriai

Gradientas

Divergencija

Rotorius  
Diferencialinės  
tapatybės

Diferencialiniai  
operatoriai  
cilindrinėse  
koordinatėse

Diferencialiniai  
operatoriai  
sferinėse  
koordinatėse

Cilindrinės ir  
sferinės  
koordinatės

Dekarto –  
cilindrinės

Dekarto – sferinės

Cilindrinės –  
sferinės

Integralinės  
teoremos

Literatūra

# Divergencija

Kitas diferencialinis operatorius *divergencija* naudojamas vektorinės funkcijos (lauko) sklaidai – išplitimui duotame erdvės taške nusakyti. Divergencija apibrėžiama kaip  $\nabla$  operatoriaus ir vektorinės koordinačių funkcijos  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$  skaliarinė sandauga:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} = \left( \mathbf{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x \mathbf{x}_0 + A_y \mathbf{y}_0 + A_z \mathbf{z}_0) \quad (2)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (3)$$

Divergencija parodo kaip stipriai išplinta vektorinio lauko jėgų linijos – tai lauko srauto matas. Jei linijos išeina iš taško, divergencija yra teigiama, o toks taškas vadinamas lauko šaltiniu. Jei linijos sueina į tašką – divergencija neigiama. Nelygia nuliui divergencija pasižymi potencialiniai laukai, kuriems  $\mathbf{A} \sim \operatorname{grad} \chi$ .

Vektorinė algebra

Vektorių  
sandauga

Diferencialiniai  
operatoriai

Gradientas

Divergencija

Rotorius

Diferencialinės  
tapatybės

Diferencialiniai  
operatoriai

cilindrinėse  
koordinatėse

Diferencialiniai  
operatoriai

sferinėse  
koordinatėse

Cilindrinės ir  
sferinės

koordinatės  
Dekarto –

cilindrinės

Dekarto – sferinės

Cilindrinės –  
sferinės

Integralinės  
teoremos

Literatūra

# Rotorius

*Rotorius* (angl. curl) parodo kiek vektorinis laukas apsisuka apie duotą erdvės tašką – tai sūkurinio lauko savybė. Rotoriaus modulis  $|\text{rot } \mathbf{A}|$  parodo sūkurio intensyvumą, o jo vektorius nukreiptas pagal dešininio sraigto taisyklę.

Matematiškai rotorius išreiškiamas operatoriaus  $\nabla$  ir vektorinio lauko  $\mathbf{A}$  vektorine sandauga  $\nabla \times \mathbf{A}$ , kuri Dekarto koordinatėjų sistemoje užrašoma tokiu būdu:

$$\text{rot } \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (4)$$

$$= \mathbf{x}_0 \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{y}_0 \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{z}_0 \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (5)$$

Vektorinė algebra

Vektorių sandauga

Diferencialiniai operatoriai

Gradientas

Divergencija

**Rotorius**

Diferencialinės tapatybės

Diferencialiniai operatoriai

cilindrinėse koordinatėse

Diferencialiniai operatoriai

sferinėse

koordinatėse

Cilindrinės ir sferinės

koordinatės

Dekarto – cilindrinės

Dekarto – sferinės

Cilindrinės – sferinės

sferinės

Integralinės

teoremos

Literatūra

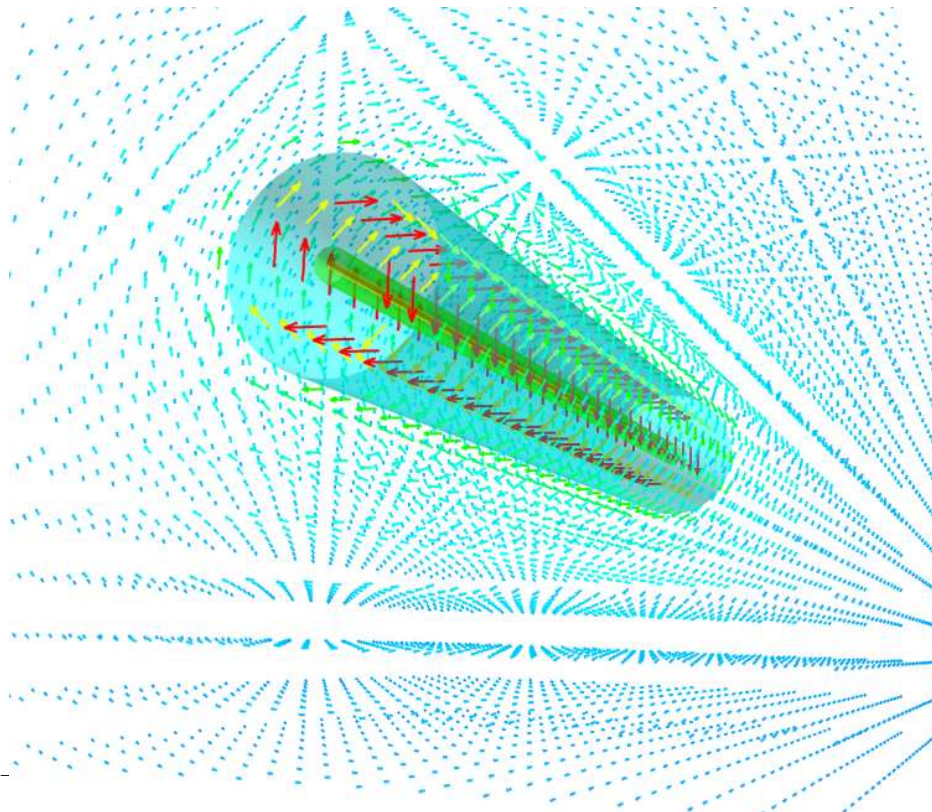
# Tiesaus laidininko vektorinis potencialas ir magnetinis laukas

Tiesaus laidininko orientuoto išilgai  $z$  ašies kuriamas vektorinis potencialas

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r} \ln(x^2 + y^2) \mathbf{z}_0.$$

Magnetinis laukas aprašomas potencialo rotoriumi [x]:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \phi_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left( \frac{-y\mathbf{x}_0 + x\mathbf{y}_0}{x^2 + y^2} \right).$$



Vektorinė algebra

Vektorių  
sandauga

Diferencialiniai  
operatoriai

Gradientas

Divergencija

**Rotorius**

Diferencialinės  
tapatybės

Diferencialiniai  
operatoriai

cilindrinėse  
koordinatėse

Diferencialiniai  
operatoriai

sferinėse  
koordinatėse

Cilindrinės ir  
sferinės

koordinatės

Dekarto –

cilindrinės

Dekarto – sferinės

Cilindrinės –

sferinės

Integralinės

teoremos

Literatūra

## Diferencialinės tapatybės

Vektorinė algebra

Vektorių  
sandauga

Diferencialiniai  
operatoriai

Gradientas

Divergencija

Rotorius

Diferencialinės  
tapatybės

Diferencialiniai  
operatoriai

cilindrinėse  
koordinatėse

Diferencialiniai  
operatoriai

sferinėse

koordinatėse

Cilindrinės ir

sferinės

koordinatės

Dekarto –

cilindrinės

Dekarto – sferinės

Cilindrinės –

sferinės

Integralinės

teoremos

Literatūra

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi \equiv \nabla \times (\nabla \psi) = 0,$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0,$$

$$\operatorname{grad} (\varphi + \psi) \equiv \nabla (\varphi + \psi) = \nabla \varphi + \nabla \psi,$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \equiv \nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B},$$

$$\operatorname{rot} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \equiv \nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B},$$

$$\operatorname{grad} (\varphi \psi) \equiv \nabla (\varphi \psi) = \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi,$$

$$\operatorname{div} (\varphi \mathbf{A}) \equiv \nabla \cdot (\varphi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot \mathbf{A},$$

$$\operatorname{rot} (\varphi \mathbf{A}) \equiv \nabla \times (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla \varphi,$$

$$\operatorname{grad} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \equiv \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$= \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \times \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \times \nabla) \mathbf{B},$$

$$\operatorname{grad} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \equiv \nabla (A^2) = 2(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A} + 2\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}),$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \equiv \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}),$$

$$\operatorname{rot} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \equiv \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B},$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

# Diferencialinės operacijos su radialiniu $\mathbf{r}$ vektoriumi

Vektorinė algebra

Vektorių

sandauga

Diferencialiniai  
operatoriai

Gradientas

Divergencija

Rotorius

Diferencialinės  
tapatybės

Diferencialiniai  
operatoriai

cilindrinėse

koordinatėse

Diferencialiniai  
operatoriai

sferinėse

koordinatėse

Cilindrinės ir  
sferinės

koordinatės

Dekarto –

cilindrinės

Dekarto – sferinės

Cilindrinės –

sferinės

Integralinės

teoremos

Literatūra

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}_0,$$

$$\nabla r^2 = 2\mathbf{r},$$

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mathbf{r}_0}{r^2},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{r}_0 = \frac{2}{r},$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = -\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = 0, \quad \text{jei } r \neq 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0,$$

$$\nabla^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{r} \cdot (\nabla^2 \mathbf{A}) + 2\nabla \cdot \mathbf{A}.$$

# Diferencialiniai operatoriai cilindrinėse koordinatėse

Vektorinė algebra

Vektorių  
sandauga

Diferencialiniai  
operatoriai

Gradientas

Divergencija

Rotorius

Diferencialinės  
tapatybės

Diferencialiniai  
operatoriai  
cilindrinėse  
koordinatėse

Diferencialiniai  
operatoriai  
sferinėse

koordinatėse

Cilindrinės ir  
sferinės

koordinatės

Dekarto –

cilindrinės

Dekarto – sferinės

Cilindrinės –

sferinės

Integralinės

teoremos

Literatūra

$$\nabla\psi = \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \phi_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial\psi}{\partial z},$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \rho \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\rho_0 & \phi_0 & \frac{1}{\rho}\mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}.$$

# Diferencialiniai operatoriai sferinėse koordinatėse

Vektorinė algebra

Vektorių  
sandauga

Diferencialiniai  
operatoriai

Gradientas

Divergencija

Rotorius

Diferencialinės  
tapatybės

Diferencialiniai  
operatoriai  
cilindrinėse  
koordinatėse

Diferencialiniai  
operatoriai  
sferinėse  
koordinatėse

Cilindrinės ir  
sferinės

koordinatės

Dekarto –  
cilindrinės

Dekarto – sferinės

Cilindrinės –  
sferinės

Integralinės  
teoremos

Literatūra

$$\nabla\psi = \mathbf{r}_0 \frac{\partial\psi}{\partial r} + \theta_0 \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \phi_0 \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\phi},$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi},$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin\theta} \mathbf{r}_0 & \frac{1}{r \sin\theta} \theta_0 & \frac{1}{r} \phi_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin\theta A_\phi \end{vmatrix}.$$



## Cilindrinės ir sferinės koordinatės

Dekarto (stačiakampės) koordinatės:  $\mathbf{A} = \mathbf{x}_0 A_x + \mathbf{y}_0 A_y + \mathbf{z}_0 A_z$ .

Cilindrinės koordinatės:  $\mathbf{A} = \rho_0 A_\rho + \phi_0 A_\phi + \mathbf{z}_0 A_z$ .

$$x = \rho \cos \phi,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$y = \rho \sin \phi,$$

$$\phi = \arctan \left( \frac{y}{x} \right),$$

$$z = z,$$

$$z = z.$$

Sferinės koordinatės:  $\mathbf{A} = \mathbf{r}_0 A_r + \theta_0 A_\theta + \phi_0 A_\phi$ .

$$x = r \sin \theta \cos \phi,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi,$$

$$\theta = \arctan \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right),$$

$$z = r \cos \theta,$$

$$\phi = \arctan \left( \frac{y}{x} \right).$$

Vektorinė algebra

Vektorių  
sandauga

Diferencialiniai  
operatoriai

Gradientas

Divergencija

Rotorius

Diferencialinės  
tapatybės

Diferencialiniai  
operatoriai

cilindrinėse  
koordinatėse

Diferencialiniai  
operatoriai

sferinėse  
koordinatėse

Cilindrinės ir  
sferinės

koordinatės

Dekarto –  
cilindrinės

Dekarto – sferinės

Cilindrinės –  
sferinės

Integralinės  
teoremos

Literatūra

## Koordinatinių transformacijų: Dekarto – cilindrinės

Dekarto  $\rightarrow$  cilindrinės:

$$\begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

Cilindrinės  $\rightarrow$  Dekarto:

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{pmatrix}$$

Vektorinė algebra

Vektorių sandauga

Diferencialiniai operatoriai

Gradientas

Divergencija

Rotorius

Diferencialinės tapatybės

Diferencialiniai operatoriai

cilindrinėse koordinatėse

Diferencialiniai operatoriai

sferinėse

koordinatėse

Cilindrinės ir

sferinės

koordinatės

Dekarto – cilindrinės

Dekarto – sferinės

Cilindrinės – sferinės

Integralinės

teoremos

Literatūra

## Koordinatinių transformacijų: Dekarto – sferinės

Dekarto  $\rightarrow$  sferinės:

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

Sferinės  $\rightarrow$  Dekarto:

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{pmatrix}$$

Vektorinė algebra

Vektorių sandauga  
Diferencialiniai operatoriai  
Gradientas  
Divergencija  
Rotorius  
Diferencialinės tapatybės  
Diferencialiniai operatoriai cilindrinėse koordinatėse  
Diferencialiniai operatoriai sferinėse koordinatėse  
Cilindrinės ir sferinės koordinatės  
Dekarto – cilindrinės

Dekarto – sferinės

Cilindrinės – sferinės  
Integralinės teoremos  
Literatūra

## Koordinatinių transformacijų: cilindrinės – sferinės

Cilindrinės  $\rightarrow$  sferinės:

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{pmatrix}$$

Sferinės  $\rightarrow$  cilindrinės:

$$\begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{pmatrix}$$

Vektorinė algebra

Vektorių  
sandauga  
Diferencialiniai  
operatoriai  
Gradientas  
Divergencija  
Rotorius  
Diferencialinės  
tapatybės  
Diferencialiniai  
operatoriai  
cilindrinėse  
koordinatėse  
Diferencialiniai  
operatoriai  
sferinėse  
koordinatėse  
Cilindrinės ir  
sferinės  
koordinatės  
Dekarto –  
cilindrinės  
Dekarto – sferinės  
Cilindrinės –  
sferinės  
Integralinės  
teoremos  
Literatūra

# Integralinės teoremos

Vektorinė algebra

Vektorių  
sandauga

Diferencialiniai  
operatoriai

Gradientas

Divergencija

Rotorius

Diferencialinės  
tapatybės

Diferencialiniai  
operatoriai

cilindrinėse  
koordinatėse

Diferencialiniai  
operatoriai

sferinėse

koordinatėse

Cilindrinės ir  
sferinės

koordinatės

Dekarto –

cilindrinės

Dekarto – sferinės

Cilindrinės –  
sferinės

Integralinės  
teoremos

Literatūra

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}, \quad \leftarrow \text{Gauso ir Ostrogradckio (divergencijos) teorema}$$
$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad \leftarrow \text{Stokso teorema}$$

# Literatūra



[Griffiths, 1999] Griffiths, D. (1999). *Introduction to electrodynamics*.  
Prentice Hall.

Vektorinė algebra

Vektorių  
sandauga  
Diferencialiniai  
operatoriai  
Gradientas  
Divergencija  
Rotorius  
Diferencialinės  
tapatybės  
Diferencialiniai  
operatoriai  
cilindrinėse  
koordinatėse  
Diferencialiniai  
operatoriai  
sferinėse  
koordinatėse  
Cilindrinės ir  
sferinės  
koordinatės  
Dekarto –  
cilindrinės  
Dekarto – sferinės  
Cilindrinės –  
sferinės  
Integralinės  
teoremos

Literatūra

## 1. Maksvelio lygtys

Pagrindinēs elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinēs elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinēs Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinēs laiko išvestinēs

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė  
Nuolatinēs srovės kuriamos

magnetinēs indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo

dėsniai

Literatūra

# 1. Maksvelio lygtys ir jų fizikinė prasmė

# Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Fizikinis dydis	Žymėjimas ir dimensija	Aprašymas
Elektros krūvis	$q$ , [C]	Elektrinio lauko šaltinis, kuris nusako elektromagnetinės sąveikos intensyvumą
Elektros krūvio tankis	$\rho$ , [C/m <sup>3</sup> ]	Elektros krūvis esantis tūrio vienetė
Elektros srovės stipris	$I$ , [A]	Kryptingas krūvininkų arba įelektrintų makroskopinių dalelių judėjimas
Elektros srovės tankis	$\mathbf{j}$ , [A/m <sup>2</sup> ]	Elektros krūvio srautas per statmeną judėjimo kryptį ploto vienetą
Elektrinio lauko stipris	$\mathbf{E}$ , [V/m]	Viena iš elektromagnetinio lauko formų, nulemiančių sąveiką tarp nejudančių krūvininkų arba tarp elektrinio lauko ir nejudančių krūvininkų

1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė  
Nuolatinės srovės kuriamos

magnetinės indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagne-

tizmo dėsniai

Literatūra



## Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Magnetinė indukcija  $\mathbf{B}$ , [T]

Viena iš elektromagnetinio lauko formų, nulemiančių sąveiką tarp judančių krūvininkų ir srovių arba tik elektromagnetinio lauko ir srovių

Elektrinė indukcija  $\mathbf{D}$ , [C/m<sup>2</sup>]

Tai elektromagnetinio lauko vektorius aprašantis elektrinį lauką medžiagose su laisvais krūviais

Magnetinio lauko stipris  $\mathbf{H}$ , [A/m]

Magnetinį lauką apibūdinantis dydis, kuris medžiagose gali skirtis nuo magnetinės indukcijos vektoriaus

Elektrinė ir magnetinė konstantos

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= 8.854 \cdot 10^{-12}, \\ &[\text{F/m}], \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7}, \\ &[\text{H/m}], \\ \epsilon_0 \mu_0 &= \frac{1}{c^2}\end{aligned}$$

Konstantos nusakančios santykius tarp elektromagnetinio lauko vektorių vakuume, bei apibūdinančios jėgas veikiančias tarp elektros krūvių ir srovių

**Elektromagnetinis laukas** – tai materijos forma, charakterizuojanti sąveiką tarp judančių ir nejudančių elektros krūvių bei aprašoma dydžiais  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{j}$  ir  $\rho$ .

1. Maksvelio lygtys  
Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)  
Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)  
Elektrodinamikos lygtys  
Integralinės Maksvelio lygtys  
Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės  
I-oji Maksvelio lygtis  
Slinkties srovė  
Nuolatinės srovės kuriamos magnetinės indukcijos laukas  
II-oji Maksvelio lygtis  
III-oji Maksvelio lygtis  
IV-oji Maksvelio lygtis  
Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo dėsniai  
Literatūra

# Elektrodinamikos lygtys

Elektrodinamikos lygtis 1864 m. suformulavo Maksvelis.

Lygtys užrašytos apibendrinus Faradėjaus, Ampero, Erstedo, Omo, Kulono ir kitus darbus.

Šių lygčių išvesti negalima, jos užrašomos ir nagrinėjamos jų išvados.

Vektorinės Maksvelio lygtys SI sistemoje diferencialiniu pavidalu:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys  
Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė  
Nuolatinės srovės kuriamos

magnetinės indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo

dėsniai

Literatūra

# Integralinės Maksvelio lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys gaunamos suintegravus diferencialines Maksvelio lygtis bei pritaikius vektorinės analizės tapatybes:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + I, \quad (5)$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \quad (6)$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = q, \quad (7)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (8)$$

Yra daugybė būdų Maksvelio lygtims užrašyti, daugiau informacijos galima rasti šiomis nuorodomis:

- [http://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell's\\_equations](http://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell's_equations)
- [http://simple.wikipedia.org/wiki/Maxwell's\\_equations](http://simple.wikipedia.org/wiki/Maxwell's_equations)

## 1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė  
Nuolatinės srovės kuriamos

magnetinės indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagne-

tizmo dėsniai

Literatūra

# Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

Diferencialinėse Maksvelio lygtyse laikinės išvestinės yra dalinės  $\frac{\partial}{\partial t}$ , o integralinėse lygtyse – pilnutinės  $\frac{d}{dt}$  todėl, kad suintegravus pagal koordinates ir išskėlus diferencijavimą pagal laiką į priekį, lieka tik vienas kintamasis – laikas  $t$ .

Skirtumas tarp dalinės ir pilnutinės laiko išvestinių:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla,$$

čia  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  yra greitis.

- 1. Maksvelio lygtys
- Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)
- Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)
- Elektrodinamikos lygtys
- Integralinės Maksvelio lygtys
- Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės
- I-oji Maksvelio lygtis
- Slinkties srovė
- Nuolatinės srovės kuriamos magnetinės indukcijos laukas
- II-oji Maksvelio lygtis
- III-oji Maksvelio lygtis
- IV-oji Maksvelio lygtis
- Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo dėsniai
- Literatūra

## I-oji Maksvelio lygtis

### 1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė  
Nuolatinės srovės kuriamos

magnetinės indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo

dėsniai

Literatūra

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

← Magnetinis laukas ir srovės

(9)

Iš šios Maksvelio lygties išvesime Bio ir Savaro dėsnį ir panagrinėsime slinkties srovę.

## I-oji Maksvelio lygtis

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \quad \leftarrow \text{Magnetinis laukas ir srovės} \quad (9)$$

Iš šios Maksvelio lygties išvesime Bio ir Savaro dėsnį ir panagrinėsime slinkties srovę.

Išvados:

1. Stacionarus procesas – nuolatinė srovė,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ :

1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė  
Nuolatinės srovės kuriamos

magnetinės indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo

dėsniai

Literatūra

## I-oji Maksvelio lygtis

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \quad \leftarrow \text{Magnetinis laukas ir srovės} \quad (9)$$

Iš šios Maksvelio lygties išvesime Bio ir Savaro dėsnį ir panagrinėsime slinkties srovę.

Išvados:

1. Stacionarus procesas – nuolatinė srovė,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ :

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r} \quad \leftarrow \text{Bio ir Savaro dėsnis} \quad (10)$$

1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė  
Nuolatinės srovės kuriamos

magnetinės indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo

dėsniai

Literatūra

## I-oji Maksvelio lygtis

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \quad \leftarrow \text{Magnetinis laukas ir srovės} \quad (9)$$

Iš šios Maksvelio lygties išvesime Bio ir Savaro dėsnį ir panagrinėsime slinkties srovę.

Išvados:

1. Stacionarus procesas – nuolatinė srovė,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ :

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r} \quad \leftarrow \text{Bio ir Savaro dėsnis} \quad (10)$$

2. Nestacionarus procesas, bet laidumo srovė neteka,  $I = 0$ ,

1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė  
Nuolatinės srovės kuriamos

magnetinės indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo

dėsniai

Literatūra



## I-oji Maksvelio lygtis

### 1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė  
Nuolatinės srovės kuriamos

magnetinės indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo

dėsniai

Literatūra

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \quad \leftarrow \text{Magnetinis laukas ir srovės} \quad (9)$$

Iš šios Maksvelio lygties išvesime Bio ir Savaro dėsnį ir panagrinėsime slinkties srovę.

Išvados:

1. Stacionarus procesas – nuolatinė srovė,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ :

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r} \quad \leftarrow \text{Bio ir Savaro dėsnis} \quad (10)$$

2. Nestacionarus procesas, bet laidumo srovė neteka,  $I = 0$ , egzistuoja slinkties srovė

$$I_S = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}, \quad (11)$$

$$\mathbf{j}_s = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \leftarrow \text{Slinkties srovės tankis} \quad (12)$$

## Slinkties srovė

Jei laidumo srovė neteka, I-oje Maksvelio lygtyje jos vaidmenį atlieka slinkties srovė  $I_S$ . Bet kokiu atveju, kai pilnutinis srovės tankis  $\mathbf{j} + \mathbf{j}_S = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \neq 0$ , egzistuoja ir tokios srovės kuriamas magnetinis laukas.

Iš divergencijos lygties  $\text{div} \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$  seka, kad pilnutinės srovės tankis  $\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  neturi nei šaltinių (ištakų), nei santakų, o jo vektorinės linijos yra arba uždaros, arba besitęsiančios į begalybę.

Vienas iš pavyzdžių – uždaru paviršiumi apribotas kondensatorius su prijungtu laidininku. Šiuo atveju slinkties srovė tarp kondensatoriaus plokštelių "uždaroma" laidumo srove kitame laidininko gale,  $I_S + I = 0$ .

### 1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės

Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys

ir dalinės laiko

išvestinės

I-oji Maksvelio

lygtis

Slinkties srovė

Nuolatinės srovės

kuriamos

magnetinės

indukcijos laukas

II-oji Maksvelio

lygtis

III-oji Maksvelio

lygtis

IV-oji Maksvelio

lygtis

Maksvelio lygtys

ir elektromagne-

tizmo

dėsniai

Literatūra

# Nuolatinės srovės kuriamos magnetinės indukcijos laukas

## 1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė

Nuolatinės srovės kuriamos magnetinės indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

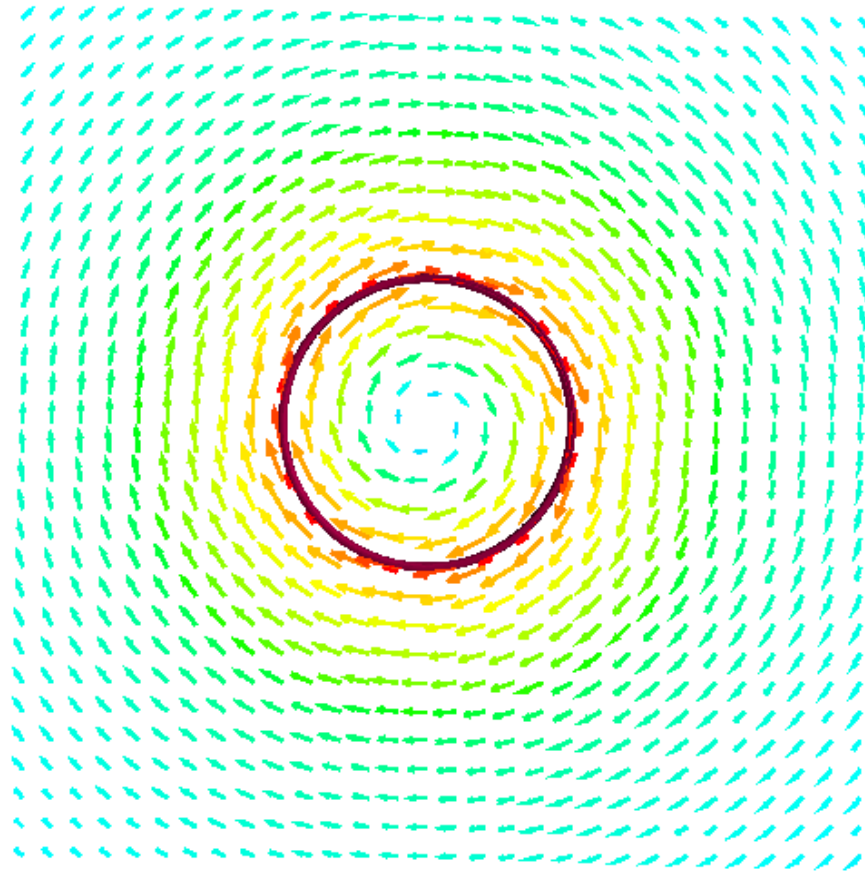
III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo

dėsniai

Literatūra



## II-oji Maksvelio lygtis

### 1. Maksvelio lygtys

Pagrindinēs elektrodinamikos sāvokos (1)

Pagrindinēs elektrodinamikos sāvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinēs Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinēs laiko išvestinēs

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovē  
Nuolatinēs srovēs kuriamos magnetinēs indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo dėsniāi

Literatūra

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

← Apibendrintas elektromagnetinēs indukcijos dėsnis (13)

## II-oji Maksvelio lygtis

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

← Apibendrintas elektromagnetinės indukcijos dėsnis (13)

Išvados:

1. Ar gali egzistuoti elektrinis laukas nekurdamas laike kintančios magnetinės indukcijos?

1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės

Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys

ir dalinės laiko

išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė

Nuolatinės srovės kuriamos

magnetinės

indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo

dėsniai

Literatūra

## II-oji Maksvelio lygtis

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

← Apibendrintas elektromagnetinės indukcijos dėsnis (13)

Išvados:

1. Ar gali egzistuoti elektrinis laukas nekurdamas laike kintančios magnetinės indukcijos?

Jei  $\mathbf{E} \propto \text{grad } \varphi$ , tai  $\text{rot } \mathbf{E} \propto \text{rot grad } \varphi = 0$  ir  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ .  
grad  $\varphi$  aprašomi laukai vadinami *potencialiniais*.

1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė  
Nuolatinės srovės kuriamos

magnetinės indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagne-

tizmo dėsniai

Literatūra

## II-oji Maksvelio lygtis

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

← Apibendrintas elektromagnetinės indukcijos dėsnis (13)

Išvados:

1. Ar gali egzistuoti elektrinis laukas nekurdamas laike kintančios magnetinės indukcijos?  
Jei  $\mathbf{E} \propto \text{grad } \varphi$ , tai  $\text{rot } \mathbf{E} \propto \text{rot grad } \varphi = 0$  ir  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ .  
 $\text{grad } \varphi$  aprašomi laukai vadinami *potencialiniais*.
2. Nagrinėsime plona laidžia vija  $L$  apribotą plotą  $S$ . Skaičiuosime elektromagnetinio lauko vektorių srautą pro šį paviršių.

- 1. Maksvelio lygtys
- Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)
- Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)
- Elektrodinamikos lygtys
- Integralinės Maksvelio lygtys
- Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės
- I-oji Maksvelio lygtis
- Slinkties srovė
- Nuolatinės srovės kuriamos magnetinės indukcijos laukas
- II-oji Maksvelio lygtis
- III-oji Maksvelio lygtis
- IV-oji Maksvelio lygtis
- Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo dėsniai
- Literatūra

## II-oji Maksvelio lygtis

### 1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė  
Nuolatinės srovės kuriamos

magnetinės indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo

dėsniai

Literatūra

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

← Apibendrintas elektromagnetinės indukcijos dėsnis (13)

Išvados:

1. Ar gali egzistuoti elektrinis laukas nekurdamas laike kintančios magnetinės indukcijos?

Jei  $\mathbf{E} \propto \text{grad } \varphi$ , tai  $\text{rot } \mathbf{E} \propto \text{rot grad } \varphi = 0$  ir  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ .  
 $\text{grad } \varphi$  aprašomi laukai vadinami *potencialiniais*.

2. Nagrinėsime plona laidžia vija  $L$  apribotą plotą  $S$ . Skaičiuosime elektromagnetinio lauko vektorių srautą pro šį paviršių.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \leftarrow \text{Faradėjaus elektromagnetinės indukcijos dėsnis, čia:}$$

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \leftarrow \text{Elektrovaros jėga}$$

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad \leftarrow \text{Magnetinės indukcijos vektoriaus srautas}$$



## III-oji Maksvelio lygtis

### 1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė  
Nuolatinės srovės kuriamos

magnetinės indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo

dėsniai

Literatūra

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

← Elektrinės indukcijos ir krūvininkų lygtis

(14)

## III-oji Maksvelio lygtis

### 1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė  
Nuolatinės srovės kuriamos

magnetinės indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo

dėsniai

Literatūra

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho$$

← Elektrinės indukcijos ir krūvininkų lygtis

(14)

Išvados:

1. Suskaičiuosime taškinių krūvininkų  $q$  kuriamą elektrinę indukciją.

## III-oji Maksvelio lygtis

### 1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė  
Nuolatinės srovės kuriamos

magnetinės indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo

dėsniai

Literatūra

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho}$$

← Elektrinės indukcijos ir krūvininkų lygtis

(14)

Išvados:

1. Suskaičiuosime taškinių krūvininkų  $q$  kuriamą elektrinę indukciją.

$$D_r(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$$

(15)

## III-oji Maksvelio lygtis

### 1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė  
Nuolatinės srovės kuriamos

magnetinės indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo

dėsniai

Literatūra

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho}$$

← Elektrinės indukcijos ir krūvininkų lygtis

(14)

Išvados:

1. Suskaičiuosime taškinių krūvininkų  $q$  kuriamą elektrinę indukciją.

$$D_r(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$$

(15)

2. Suskaičiuosime jėgą veikiančią tarp dviejų krūvininkų  $q$  ir  $q_1$ .

## III-oji Maksvelio lygtis

### 1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovės Nuolatinės srovės kuriamos

magnetinės indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo

dėsniai

Literatūra

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho} \leftarrow \text{Elektrinės indukcijos ir krūvininkų lygtis} \quad (14)$$

Išvados:

1. Suskaičiuosime taškinių krūvininkų  $q$  kuriamą elektrinę indukciją.

$$D_r(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \quad (15)$$

2. Suskaičiuosime jėgą veikiančią tarp dviejų krūvininkų  $q$  ir  $q_1$ .

$$F_r = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \leftarrow \text{Kulono dėsnis} \quad (16)$$

## IV-oji Maksvelio lygtis

### 1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė  
Nuolatinės srovės kuriamos

magnetinės indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo

dėsniai

Literatūra

$\text{div } \mathbf{B} = 0$  ← Magnetinės indukcijos vektorių linijų nenutrūkstamumas

(17)

## IV-oji Maksvelio lygtis

### 1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė  
Nuolatinės srovės kuriamos

magnetinės indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo

dėsniai

Literatūra

$\text{div } \mathbf{B} = 0$  ← Magnetinės indukcijos vektorių linijų nenutrūkstamumas

(17)

Išvados:

1. Magnetinis laukas neturi tokių šaltinių kaip elektrinis laukas – magnetinių krūvių,  $\rho_m = 0$ .

## IV-oji Maksvelio lygtis

### 1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė  
Nuolatinės srovės kuriamos

magnetinės indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo

dėsniai

Literatūra

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

← Magnetinės indukcijos vektorių linijų nenutrūkstamumas

(17)

Išvados:

1. Magnetinis laukas neturi tokių šaltinių kaip elektrinis laukas – magnetinių krūvių,  $\rho_m = 0$ .
2. Magnetinio lauko linijos – arba uždaros, arba eina į begalybę.



## IV-oji Maksvelio lygtis

### 1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė  
Nuolatinės srovės kuriamos

magnetinės indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo

dėsniai

Literatūra

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

← Magnetinės indukcijos vektoriaus linijų nenutrūkstamumas

(17)

Išvados:

1. Magnetinis laukas neturi tokių šaltinių kaip elektrinis laukas – magnetinių krūvių,  $\rho_m = 0$ .
2. Magnetinio lauko linijos – arba uždaros, arba eina į begalybę.
3. Suintegravus IV Maksvelio lygtį uždaru tūriu  $V$ ,

## IV-oji Maksvelio lygtis

### 1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys ir dalinės laiko išvestinės

I-oji Maksvelio lygtis

Slinkties srovė  
Nuolatinės srovės kuriamos

magnetinės indukcijos laukas

II-oji Maksvelio lygtis

III-oji Maksvelio lygtis

IV-oji Maksvelio lygtis

Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo

dėsniai

Literatūra

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0} \leftarrow \text{Magnetinės indukcijos vektoriaus linijų nenutrūkstamumas} \quad (17)$$

Išvados:

1. Magnetinis laukas neturi tokių šaltinių kaip elektrinis laukas – magnetinių krūvių,  $\rho_m = 0$ .
2. Magnetinio lauko linijos – arba uždaros, arba eina į begalybę.
3. Suintegravus IV Maksvelio lygtį uždaru tūriu  $V$ ,

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{B} dv = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (18)$$

t.y. per uždarą paviršių magnetinės indukcijos srautas visada lygus nuliui.

# Maksvelio lygtys ir elektromagnetizmo dėsniai

## 1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės

Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys

ir dalinės laiko

išvestinės

I-oji Maksvelio

lygtis

Slinkties srovė

Nuolatinės srovės

kuriamos

magnetinės

indukcijos laukas

II-oji Maksvelio

lygtis

III-oji Maksvelio

lygtis

IV-oji Maksvelio

lygtis

Maksvelio lygtys

ir elektromagne-

tizmo

dėsniai

Literatūra

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad \leftarrow \text{Ampero dėsnis}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \leftarrow \text{Faradėjaus dėsnis}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \leftarrow \text{Kulono dėsnis}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad \leftarrow \text{Gauso dėsnis}$$

NewScientist apie Maksvelio ir kitas lygtis populiariai:  
Seven equations that rule your world

# Literatūra



1. Maksvelio lygtys

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (1)

Pagrindinės elektrodinamikos sąvokos (2)

Elektrodinamikos lygtys

Integralinės

Maksvelio lygtys

Maksvelio lygtys

ir dalinės laiko

išvestinės

I-oji Maksvelio

lygtis

Slinkties srovė

Nuolatinės srovės

kuriamos

magnetinės

indukcijos laukas

II-oji Maksvelio

lygtis

III-oji Maksvelio

lygtis

IV-oji Maksvelio

lygtis

Maksvelio lygtys

ir elektromagne-

tizmo

dėsniai

Literatūra

[Griffiths, 1999] Griffiths, D. (1999). *Introduction to electrodynamics*. Prentice Hall.

[Jackson, 1999] Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics*. Wiley.

## 2. Krūvio tvermēs dēsnis

Srovēs tolydumo  
lygtis

Srovēs tolydumo  
lygtis ir krūvio  
tvermēs dēsnis (1)

Srovēs tolydumo  
lygtis ir krūvio  
tvermēs dēsnis (2)

Srovēs tolydumo  
lygtis nuolatinei  
srovei

Literatūra

## 2. Krūvio tvermēs dēsnis ir srovēs tolydumo lygtis

## Srovės tolydumo lygtis

Srovės tolydumo lygtį gausime iš I ir III Maksvelio lygčių:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (2)$$

2. Krūvio tvermės dėsnis

Srovės tolydumo lygtis

Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (1)

Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (2)

Srovės tolydumo lygtis nuolatinei srovei

Literatūra

## Srovės tolydumo lygtis

Srovės tolydumo lygtį gausime iš I ir III Maksvelio lygčių:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (2)$$

Pasinaudoję tapatybe  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$  gauname:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.} \leftarrow \text{Srovės tolydumo lygtis} \quad (3)$$

2. Krūvio tvermės dėsnis

Srovės tolydumo lygtis

Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (1)

Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (2)

Srovės tolydumo lygtis nuolatinei srovei

Literatūra

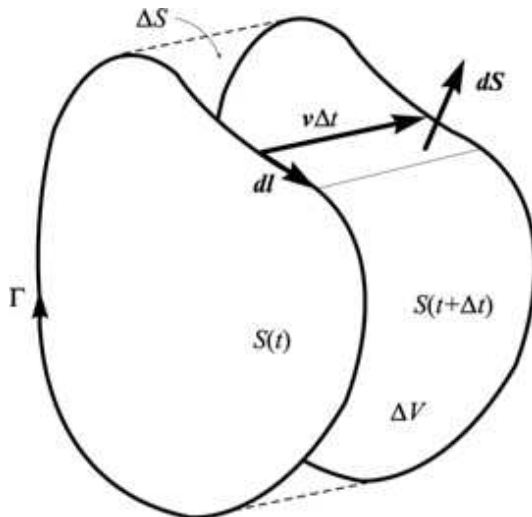
## Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (1)

Norėdami suprasti, kaip srovės tolydumo lygtis susieta su krūvio tvermės dėsniu, pasinaudosime Reinoldso pernašos teorema [Rothwell and Cloud, 2008] krūvio tankiui  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$  per paviršių  $S = S(\mathbf{r}, t)$ :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dv = \int_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \oint_{S(t)} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}. \quad (4)$$

čia  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  yra greitis, kuris reiškia:

1. paviršiaus  $S(t)$  taškų judėjimo greitį,
2. krūvininkų  $\rho(\mathbf{r}, t)$  koordinatinių kitimą laike.





## Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (2)

Pasinaudoję srovės tankio išraiška  $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ , iš krūvio tvermės dėsnio

$$\frac{dq}{dt} = 0, \tag{5}$$

gausime integralinę srovės tolydumo lygtį

2. Krūvio tvermės dėsnis

Srovės tolydumo lygtis

Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (1)

Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (2)

Srovės tolydumo lygtis nuolatinei srovei

Literatūra

## Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (2)

Pasinaudoję srovės tankio išraiška  $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ , iš krūvio tvermės dėsnio

$$\frac{dq}{dt} = 0, \quad (5)$$

gausime integralinę srovės tolydumo lygtį

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dv + \oint_{S(t)} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (6)$$

t.y. suintegruotas tūriu  $V(t)$  laikinis krūvio tankio pokytis  $\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$  yra kompensuojamas pro paviršių  $S(t)$  pratekančia srove.

2. Krūvio tvermės dėsnis

Srovės tolydumo lygtis

Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (1)

Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (2)

Srovės tolydumo lygtis nuolatinei srovei

Literatūra

## Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (2)

Pasinaudoję srovės tankio išraiška  $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ , iš krūvio tvermės dėsnio

$$\frac{dq}{dt} = 0, \quad (5)$$

gausime integralinę srovės tolydumo lygtį

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dv + \oint_{S(t)} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (6)$$

t.y. suintegruotas tūriu  $V(t)$  laikinis krūvio tankio pokytis  $\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$  yra kompensuojamas pro paviršių  $S(t)$  pratekančia srove.

Pasinaudoję Gauso divergencijos teorema

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dv, \quad (7)$$

gausime diferencialinę srovės tolydumo lygtį

2. Krūvio tvermės dėsnis

Srovės tolydumo lygtis

Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (1)

Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (2)

Srovės tolydumo lygtis nuolatinei srovei

Literatūra

## Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (2)

Pasinaudoję srovės tankio išraiška  $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ , iš krūvio tvermės dėsnio

$$\frac{dq}{dt} = 0, \quad (5)$$

gausime integralinę srovės tolydumo lygtį

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dv + \oint_{S(t)} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (6)$$

t.y. suintegruotas tūriu  $V(t)$  laikinis krūvio tankio pokytis  $\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$  yra kompensuojamas pro paviršių  $S(t)$  pratekančia srove.

Pasinaudoję Gauso divergencijos teorema

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dv, \quad (7)$$

gausime diferencialinę srovės tolydumo lygtį

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (8)$$

2. Krūvio tvermės dėsnis

Srovės tolydumo lygtis

Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (1)

Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (2)

Srovės tolydumo lygtis nuolatinei srovei

Literatūra

## Srovės tolydumo lygtis nuolatinei srovei

Nuolatinei srovei  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  ir srovės tolydumo lygtis tampa:

$$\text{div } \mathbf{j} = 0.$$

← Srovės tolydumo lygtis nuolatinei srovei

(9)

2. Krūvio tvermės dėsnis

Srovės tolydumo lygtis

Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (1)

Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (2)

Srovės tolydumo lygtis nuolatinei srovei

Literatūra

## Srovės tolydumo lygtis nuolatinei srovei

Nuolatinei srovei  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  ir srovės tolydumo lygtis tampa:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{j} = 0.} \leftarrow \text{Srovės tolydumo lygtis nuolatinei srovei} \quad (9)$$

Suintegravus tūriu ir pritaikius Gauso teoremą,

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad \leftarrow \text{Srovės linijų uždarumo sąlyga} \quad (10)$$

2. Krūvio tvermės dėsnis

Srovės tolydumo lygtis

Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (1)

Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (2)

Srovės tolydumo lygtis nuolatinei srovei

Literatūra

## Srovės tolydumo lygtis nuolatinei srovei

Nuolatinei srovei  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  ir srovės tolydumo lygtis tampa:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{j} = 0.} \leftarrow \text{Srovės tolydumo lygtis nuolatinei srovei} \quad (9)$$

Suintegravus tūriu ir pritaikius Gauso teoremą,

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad \leftarrow \text{Srovės linijų uždarumo sąlyga} \quad (10)$$

Jei paviršius  $S$  sudarytas iš  $S_i$  skerspjūvio ploto laidininkų, iš srovės tolydumo lygties gauname pirmąjį Kirchofo dėsnį:

$$\sum_i I_i = 0, \quad (11)$$

t.y., į bet kurį grandinės mazgą įtekančių ir ištekančių srovių algebrinė suma yra lygi nuliui.

2. Krūvio tvermės dėsnis

Srovės tolydumo lygtis

Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (1)

Srovės tolydumo lygtis ir krūvio tvermės dėsnis (2)

Srovės tolydumo lygtis nuolatinei srovei

Literatūra

## Literatūra



2. Krūvio tvermēs  
dēsnis

Srovēs tolydumo  
lygtis

Srovēs tolydumo  
lygtis ir krūvio  
tvermēs dēsnis (1)

Srovēs tolydumo  
lygtis ir krūvio  
tvermēs dēsnis (2)

Srovēs tolydumo  
lygtis nuolatinei  
srovei

Literatūra

[Griffiths, 1999] Griffiths, D. (1999). *Introduction to electrodynamics*.  
Prentice Hall.

[Jackson, 1999] Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics*.  
Wiley.

[Rothwell and Cloud, 2008] Rothwell, E. and Cloud, M. (2008).  
*Electromagnetics*. CRC Press.



### 3. EM medžiagų savybės

Medžiagos lygtys elektromagnetiniam laukui  
Laisvos erdvės  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  ir  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  sąryšiai  
Tiesinės izotropinės medžiagos  
Medžiagos elektrinės poliarizacijos ir įmagnetėjimo vektoriai  
Elektrinis laidumas  
Laidininkai ir dielektrikai  
Laidumo ir slinkties srovių santykio priklausomybė nuo dažnio  
Anizotropinės medžiagos  
Biizotropinės medžiagos  
Netiesinės medžiagos  
Literatūra

## 3. Elektromagnetinės medžiagų savybės

## Medžiagos lygtys elektromagnetiniam laukui

3. EM medžiagų savybės

Medžiagos lygtys elektromagnetiniam laukui

Laisvos erdvės  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  ir  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  sąryšiai

Tiesinės izotropinės medžiagos Medžiagos elektrinės poliarizacijos ir įmagnetėjimo vektoriai

Elektrinis laidumas Laidininkai ir dielektrikai Laidumo ir slinkties srovių santykio priklausomybė nuo dažnio

Anizotropinės medžiagos Biizotropinės medžiagos Netiesinės medžiagos

Literatūra

Skirtingai nuo mechanikos, elektromagnetinio lauko būseną kiekvienu laiko momentu aprašoma begaliniu parametru skaičiumi – tolydinėmis erdviųjų koordinačių funkcijomis – vektoriais  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{j}$  ir skaliaru  $\rho$ .

Šie parametrai gali būti skirstomi į dvi grupes:

- Elektromagnetinio lauko šaltinius (priežastis):  $\rho$  ir  $\mathbf{j}$ ,
- Elektromagnetinės sąveikos laukus (pasekmė):  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ .

Maksvelio lygtys elektromagnetinį lauką pilnai aprašo tik laisvoje erdvėje (vakuume), tačiau medžiagoje šių lygčių sistema nėra uždara. Maksvelio lygtys yra vektorinės diferencialinės lygtys, todėl vienareikšmiškam sprendiniui papildomai reikalinga:

- Elektrinio ir magnetinio lauko kraštinės sąlygos nagrinėjamą tūrį skiriančiame paviršiuje,
- $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  sąryšiai su  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{H}$  priklausantys nuo medžiagos mikroskopinių savybių.

## Laisvos erdvės $\mathbf{D}$ , $\mathbf{B}$ ir $\mathbf{E}$ , $\mathbf{H}$ sąryšiai

Laisvoje erdvėje  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  skiriasi nuo  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{H}$  tik pastoviais daugikliais – konstantomis:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (2)$$

čia elektrinė  $\epsilon_0$  ir magnetinė  $\mu_0$  konstantos susijusios su šviesos greičiu  $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ , iš kurių nepriklausoma yra tik viena:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [H/m]}, \quad \leftarrow \text{Magnetinė konstanta, apibrėžta} \quad (3)$$

$$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ [m/s]}, \quad \leftarrow \text{Šviesos greitis, išmatuotas} \quad (4)$$

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ [F/m]}. \quad \leftarrow \text{Elektrinė konstanta, apskaičiuota} \quad (5)$$

3. EM medžiagų savybės

Medžiagos lygtys elektromagnetiniam laukui

Laisvos erdvės  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  ir  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  sąryšiai

Tiesinės izotropinės medžiagos elektrinės poliarizacijos ir imagnetėjimo vektoriai

Elektrinis laidumas

Laidininkai ir dielektrikai

Laidumo ir slinkties srovių santykio priklausomybė nuo dažnio

Anizotropinės medžiagos

Biizotropinės medžiagos

Netiesinės medžiagos

Literatūra

## Tiesinės izotropinės medžiagos

Bendru atveju medžiagoje esantis elektromagnetinis laukas  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  susijęs su išoriniu lauku  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{H}$  sąryšiais, priklausančiais nuo medžiagos savybių:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}). \quad (6)$$

Dažniausiai pasitaikantys reiškiniai yra *lokalūs* ir *beinertiški*, t.y. medžiagoje esantis laukas priklauso nuo išorinio lauko tik tame pačiame erdvės taške ir tuo pačiu laiko momentu,

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \sim \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \sim \mathbf{H}(\mathbf{r}, t). \quad (7)$$

Tokiu būdu medžiagos lygtys aprašomos tiesinėmis priklausomybėmis:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (8)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (9)$$

čia dielektrinė  $\epsilon$  ir magnetinė  $\mu$  skvarbos išreiškiamos per laisvos erdvės elektromagnetines konstantas  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  ir santykinės skvarbas  $\epsilon_r$ ,  $\mu_r$ :

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r, \quad \mu = \mu_0 \cdot \mu_r. \quad (10)$$

3. EM medžiagų savybės

Medžiagos lygtys elektromagnetiniam

laukui

Laisvos erdvės  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  ir  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  sąryšiai

Tiesinės izotropinės medžiagos

Medžiagos elektrinės poliarizacijos ir įmagnetėjimo vektoriai

Elektrinis laidumas

Laidininkai ir dielektrikai

Laidumo ir slinkties srovių santykio

priklausomybė nuo dažnio

Anizotropinės medžiagos

Biizotropinės medžiagos

Netiesinės medžiagos

Literatūra

## Medžiagos elektrinės poliarizacijos ir įmagnetėjimo vektoriai

Medžiagos poveikis elektromagnetiniam laukui gali būti aprašytas elektrinės poliarizacijos (poliarizuotumo)  $\mathbf{P}$  ir įmagnetėjimo  $\mathbf{M}$  vektoriais.

Jei vakuume elektromagnetinis laukas aprašomas

$$\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (11)$$

tai medžiagoje bus

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{M}. \quad (12)$$

Daugeliu atvejų galioja tiesinės priklausomybės:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \mu_0 \chi_m \mathbf{H}, \quad (13)$$

čia  $\chi_e$  ir  $\chi_m$  – elektrinė ir magnetinė jėga (bedimensiniai dydžiai), susiję su santykinėmis skvarbomis:

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e, \quad \mu_r = 1 + \chi_m. \quad (14)$$

3. EM medžiagų savybės

Medžiagos lygtys elektromagnetiniam laukui

Laisvos erdvės  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  ir  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  sąryšiai

Tiesinės izotropinės medžiagos

Medžiagos elektrinės poliarizacijos ir įmagnetėjimo vektoriai

Elektrinis laidumas

Laidininkai ir dielektrikai  
Laidumo ir slinkties srovių santykio

priklausomybė nuo dažnio  
Anizotropinės medžiagos

Biizotropinės medžiagos

Netiesinės medžiagos

Literatūra

## Elektrinis laidumas

Trečioji medžiagos elektromagnetinio lauko lygtis aprašo elektros srovės tankio priklausomybę nuo elektrinio lauko stiprio:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \leftarrow \text{Tai Omo dėsnis} \quad (15)$$

čia  $\sigma$  – medžiagos elektrinis laidumas, matuojamas  $[\text{S/m}] \equiv [1/(\Omega \text{ m})]$ .

Priklausomai nuo elektrinio laidumo medžiagos gali būti skirstomos į laidininkus ir dielektrikus.

3. EM medžiagų savybės

Medžiagos lygtys elektromagnetiniam

laukui

Laisvos erdvės  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  ir  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  sąryšiai

Tiesinės

izotropinės

medžiagos

Medžiagos

elektrinės

poliarizacijos ir

įmagnetėjimo

vektoriai

Elektrinis

laidumas

Laidininkai ir

dielektrikai

Laidumo ir

slinkties srovių

santykio

priklausomybė

nuo dažnio

Anizotropinės

medžiagos

Biizotropinės

medžiagos

Netiesinės

medžiagos

Literatūra

## Laidininkai ir dielektrikai

### 3. EM medžiagų savybės

Medžiagos lygtys elektromagnetiniam laukui

Laisvos erdvės  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  ir  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  sąryšiai

Tiesinės izotropinės medžiagos

Medžiagos elektrinės poliarizacijos ir įmagnetėjimo vektoriai  
Elektrinis laidumas

Laidininkai ir dielektrikai

Laidumo ir slinkties srovių santykio priklausomybė nuo dažnio

Anizotropinės medžiagos

Biizotropinės medžiagos

Netiesinės medžiagos

Literatūra

- Idealiai laidininkui  $\sigma \rightarrow \infty$ , (laidininko viduje  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B} = 0$ ),
- Idealiai dielektrikui  $\sigma \rightarrow 0$ , nelieka laidumo srovės.

*Koks skirtumas tarp šių medžiagų elektrodinamikos požiūriu?*

Pilnutinė srovė susideda iš laidumo ir slinkties srovių:

$$\mathbf{j} + \mathbf{j}_s = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (16)$$

Laidininkams dominuoja pirmasis šios lygties dėmuo, dielektrikams – antrasis.

*Koks kriterijus taikomas laidininkų ir dielektrikų atskyrimui?*

Esant harmoniniam elektromagnetiniam laukui,  $\sim \cos \omega t$ ,

$$\mathbf{j} \sim e^{i\omega t}, \quad \mathbf{E} \sim e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \sim \omega e^{i\omega t}, \quad (17)$$

laidumo ir slinkties srovių santykis:

$$\frac{|\mathbf{j}|}{|\mathbf{j}_s|} = \frac{|\sigma \mathbf{E}|}{|\omega \epsilon \mathbf{E}|} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \begin{cases} \gg 1 & \text{laidininkas,} \\ \ll 1 & \text{dielektrikas.} \end{cases} \quad (18)$$

Medžiagos savybės priklauso nuo dažnio: aukštuose dažniuose būdama dielektriku, ta pati medžiaga žemuose dažniuose gali virsti laidininku.

# Laidumo ir slinkties srovių santykio priklausomybė nuo dažnio

## 3. EM medžiagų savybės

Medžiagos lygtys elektromagnetiniam

laukui

Laisvos erdvės  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  ir  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  sąryšiai

Tiesinės izotropinės medžiagos

Medžiagos

elektrinės

poliarizacijos ir

įmagnetėjimo

vektoriai

Elektrinis

laidumas

Laidininkai ir

dielektrikai

Laidumo ir

slinkties srovių

santykio

priklausomybė

nuo dažnio

Anizotropinės

medžiagos

Biizotropinės

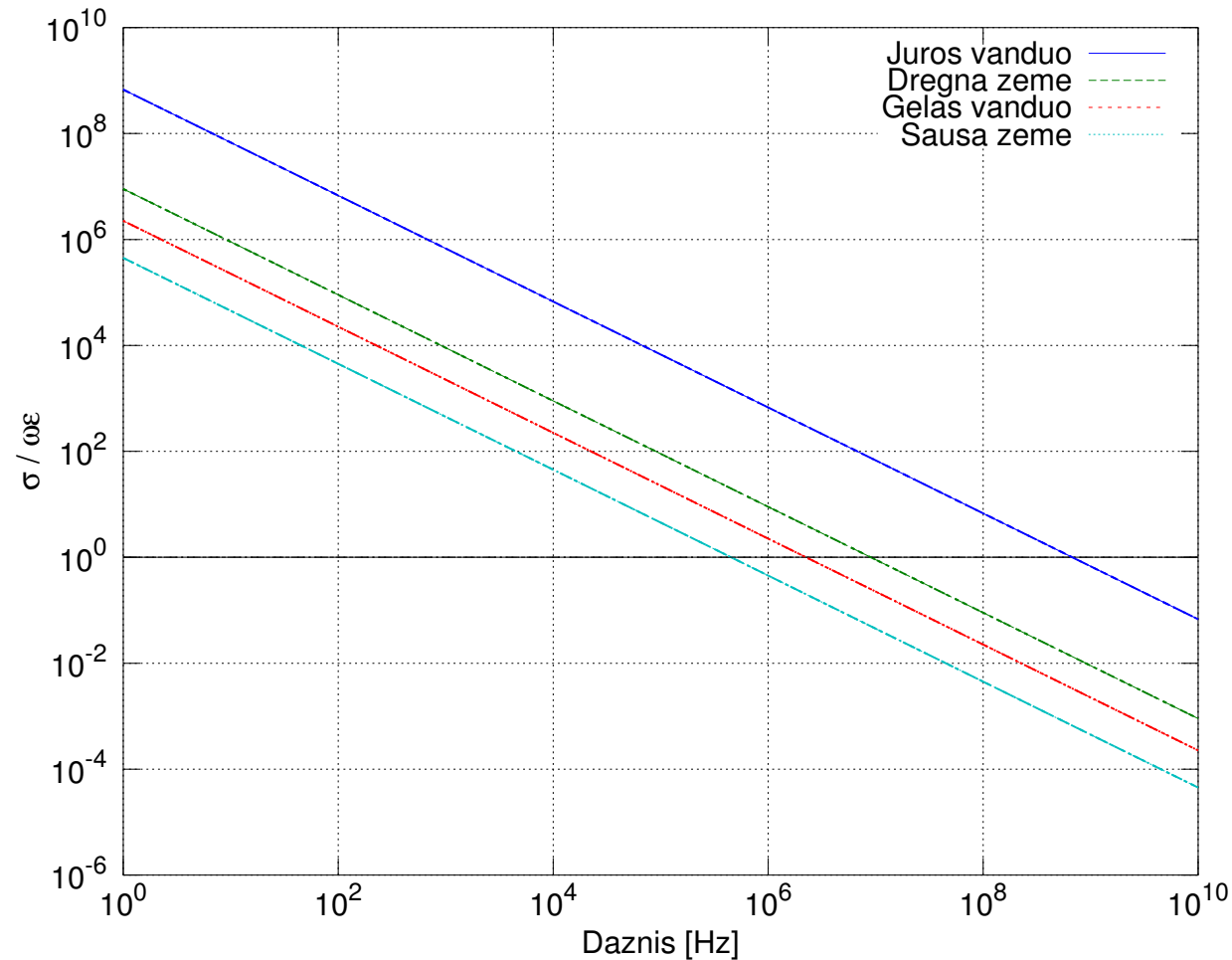
medžiagos

Netiesinės

medžiagos

Literatūra

$$\frac{|\mathbf{j}|}{|\mathbf{j}_s|} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$$





## Anizotropinės medžiagos

Makroskopiniai medžiagų parametrai  $\epsilon$ ,  $\mu$  ir  $\sigma$  gali būti ne skaliarai, o *tenzoriai*. Tokiais atvejais medžiagos vadinamos *anizotropinėmis*, jose esančio elektromagnetinio lauko kryptis nesutampa su išorinio lauko kryptimi.

Dielektrinės skvarbos tenzorius aprašomas matrica:

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E},$$

$$D_x = \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z,$$

$$D_y = \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z,$$

$$D_z = \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z.$$

Taip pat ir magnetinė skvarba bei laidumas gali būti aprašyti tenzoriais:

$$\mathbf{B} = \hat{\mu} \mathbf{H}, \quad \hat{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} = \hat{\sigma} \mathbf{E}, \quad \hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

3. EM medžiagų savybės

Medžiagos lygtys elektromagnetiniam

laukui

Laisvos erdvės  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  ir  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  sąryšiai

Tiesinės

izotropinės

medžiagos

Medžiagos

elektrinės

poliarizacijos ir

įmagnetėjimo

vektoriai

Elektrinis

laidumas

Laidininkai ir

dielektrikai

Laidumo ir

slinkties srovių

santykio

priklausomybė

nuo dažnio

Anizotropinės medžiagos

Biizotropinės

medžiagos

Netiesinės

medžiagos

Literatūra

## Biizotropinės medžiagos

Medžiagą aprašančios elektrinių ir magnetinių laukų lygtys yra surištos:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \xi \mathbf{H}, \quad (20)$$

$$\mathbf{B} = \zeta \mathbf{E} + \mu \mathbf{H}, \quad (21)$$

čia medžiagos parametrai  $\xi$ ,  $\zeta$  aprašo ryšius tarp elektrinių ir magnetinių laukų. Tai dažniausiai sintetinės medžiagos, pavyzdžiui dirbtiniai dielektrikai ar feromagnetinės dalelės įterptos į skysčius.

Atskiras biizotropinių medžiagų atvejis – tai *chiralinės* medžiagos, kurioms

$$\zeta = (\chi + i\kappa)\sqrt{\epsilon\mu}, \quad (22)$$

$$\xi = (\chi - i\kappa)\sqrt{\epsilon\mu}. \quad (23)$$

3. EM medžiagų savybės

Medžiagos lygtys elektromagnetiniam laukui

Laisvos erdvės  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  ir  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  sąryšiai

Tiesinės izotropinės medžiagos

Medžiagos elektrinės

poliarizacijos ir įmagnetėjimo vektoriai

Elektrinis laidumas

Laidininkai ir dielektrikai

Laidumo ir slinkties srovių santykio

priklausomybė nuo dažnio

Anizotropinės medžiagos

Biizotropinės medžiagos

Netiesinės medžiagos

Literatūra

# Netiesinės medžiagos

Netiesinės elektromagnetinio lauko charakteristikos:

- Histerezė
- Įsotinimas
- Parametrinis stiprinimas
- Harmonikų generavimas

Netiesiniai reiškiniai plačiai naudojami optikoje bei elektronikoje – lazeriuose, p-n sandūrose bei feritiniuose įrenginiuose. Tokiose medžiagose elektromagnetinio lauko vektoriai aprašomi netiesinėmis lygtimis:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \{D_i(\mathbf{r}, t)\}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \{E_i(\mathbf{r}, t)\}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 E_i(\mathbf{r}, t) + \sum_{j=1}^3 \epsilon_0 \chi_{ij}^{(1)} E_j(\mathbf{r}, t) + \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)} E_j(\mathbf{r}, t) E_k(\mathbf{r}, t) + \sum_{j,k,l=1}^3 \epsilon_0 \chi_{ijkl}^{(3)} E_j(\mathbf{r}, t) E_k(\mathbf{r}, t) E_l(\mathbf{r}, t) + \dots,$$

čia  $\chi_{ijk}^{(2)}$  ir  $\chi_{ijkl}^{(3)}$  yra atitinkamai antros ir trečios eilės elektrinė jėga.

3. EM medžiagų savybės

Medžiagos lygtys elektromagnetiniam laukui

Laisvos erdvės  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  ir  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  sąryšiai

Tiesinės izotropinės medžiagos Medžiagos elektrinės poliarizacijos ir įmagnetėjimo vektoriai

Elektrinis laidumas Laidininkai ir dielektrikai Laidumo ir slinkties srovių santykio priklausomybė nuo dažnio

Anizotropinės medžiagos Biizotropinės medžiagos

Netiesinės medžiagos

Literatūra

# Literatūra



## 3. EM medžiagų savybės

Medžiagos lygtys elektromagnetiniam laukui

Laisvos erdvės  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  ir  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  sąryšiai

Tiesinės  
izotropinės  
medžiagos  
Medžiagos  
elektrinės  
polarizacijos ir  
įmagnetėjimo  
vektoriai

Elektrinis  
laidumas  
Laidininkai ir  
dielektrikai  
Laidumo ir  
slinkties srovių  
santykio

priklausomybė  
nuo dažnio  
Anizotropinės  
medžiagos

Biizotropinės  
medžiagos  
Netiesinės  
medžiagos

Literatūra

[Griffiths, 1999] Griffiths, D. (1999). *Introduction to electrodynamics*. Prentice Hall.

[Rothwell and Cloud, 2008] Rothwell, E. and Cloud, M. (2008). *Electromagnetics*. CRC Press.

#### 4. Kraštinės sąlygos

Maksvelio lygtys

Paviršiniai krūviai (1)

Paviršiniai krūviai (2)

Paviršinės srovės

Paviršiaus geometrija

**D** kraštinės sąlygos

**B** kraštinės sąlygos

**H** kraštinės sąlygos (1)

**D** kraštinės sąlygos (2)

**E** kraštinės sąlygos

Izotropinės medžiagos

Izotropinės medžiagos

Laidininkai

Dielektriko plyšys

Apibendrinimas

Literatūra

## 4. Elektromagnetinio lauko vektorių kraštinės sąlygos

# Maksvelio lygtys ir kraštinės sąlygos

Vektorinės Maksvelio lygtys diferencialiniu pavidalu:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

- Maksvelio lygčių sprendinio unikalumui reikalingos elektromagnetinio lauko vektorių  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{H}$  kraštinės sąlygos nagrinėjamą turį skiriančiajame paviršiuje.
- Pereinant dviejų aplinkų skiriamąją ribą, medžiagų savybės  $\epsilon$ ,  $\mu$  ir  $\sigma$  kinta šuoliškai.
- Paviršiniame sluoksnyje gali egzistuoti krūviai (laidumo bei surištieji) ir paviršinės srovės, darančios įtaką elektromagnetinio lauko vektorių kraštinėms sąlygoms.
- Panagrinėsime kaip kinta  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{H}$  vektoriai pereinant skiriamąjį paviršių.

4. Kraštinės sąlygos

Maksvelio lygtys

Paviršiniai krūviai (1)

Paviršiniai krūviai (2)

Paviršinės srovės

Paviršiaus geometrija

$\mathbf{D}$  kraštinės sąlygos

$\mathbf{B}$  kraštinės sąlygos

$\mathbf{H}$  kraštinės sąlygos (1)

$\mathbf{D}$  kraštinės sąlygos (2)

$\mathbf{E}$  kraštinės sąlygos

Izotropinės medžiagos

Izotropinės medžiagos

Laidininkai

Dielektriko plyšys

Apibendrinimas

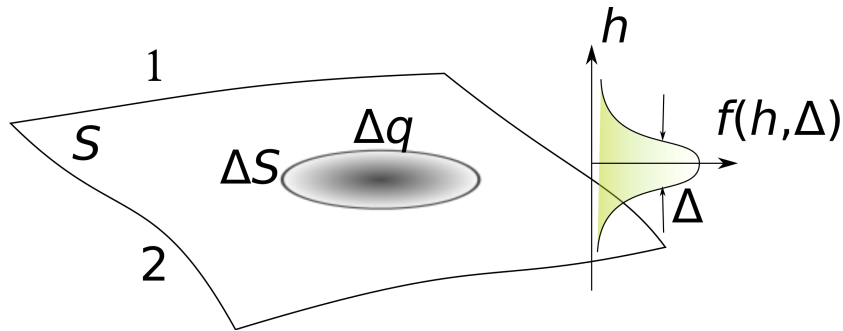
Literatūra

## Paviršiniai krūviai (1)

Paviršinis krūvio tankis aprašomas paviršiaus  $S$  elementariajame plote  $\Delta S$  susikaupusio krūvio  $\Delta q$  ir to paviršiaus elemento ploto ribiniu santykiu:

$$\xi = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}.$$

(5)



Paviršinis krūvio tankis  $\xi(S)$  susietas su tūriniu tankiu  $\rho(\mathbf{r})$  tolydine tankio pasiskirstymo funkcija  $f(h, \Delta)$  išilgine paviršiaus normalės kryptimi  $h$  [Rothwell and Cloud, 2008]:

$$\rho(\mathbf{r}) = \xi(S) f(h, \Delta),$$

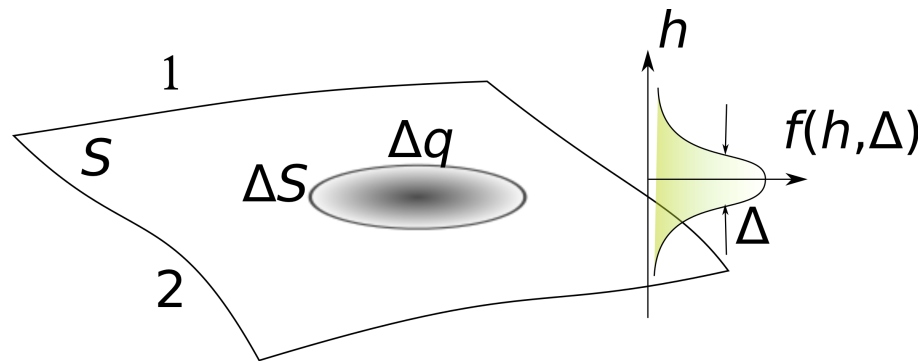
(6)

su sąlygomis

$$\int_0^{\infty} f(h, \Delta) dh = 1, \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f(h, \Delta) dh = \delta(h).$$

(7)

## Paviršiniai krūviai (2)



Vienas iš krūvio tankio pasiskirstymo funkcijų pavyzdžių – normalusis Gauso skirstinys:

$$f(h, \Delta) = \frac{e^{-\frac{h^2}{\Delta^2}}}{\sqrt{\pi}\Delta}. \quad (8)$$

Visas krūvis suintegruotas tūriu:

$$q = \int_V \rho(\mathbf{r}) dv = \int_{-\infty}^{\infty} \int_S \xi(s) ds f(h, \Delta) dh = \int_S \xi(s) ds.$$

4. Kraštinės sąlygos

Maksvelio lygtys

Paviršiniai krūviai (1)

Paviršiniai krūviai (2)

Paviršinės srovės

Paviršiaus geometrija

$\mathbf{D}$  kraštinės sąlygos

$\mathbf{B}$  kraštinės sąlygos

$\mathbf{H}$  kraštinės sąlygos (1)

$\mathbf{D}$  kraštinės sąlygos (2)

$\mathbf{E}$  kraštinės sąlygos

Izotropinės medžiagos

Izotropinės medžiagos

Laidininkai

Dielektriko plyšys

Apibendrinimas

Literatūra

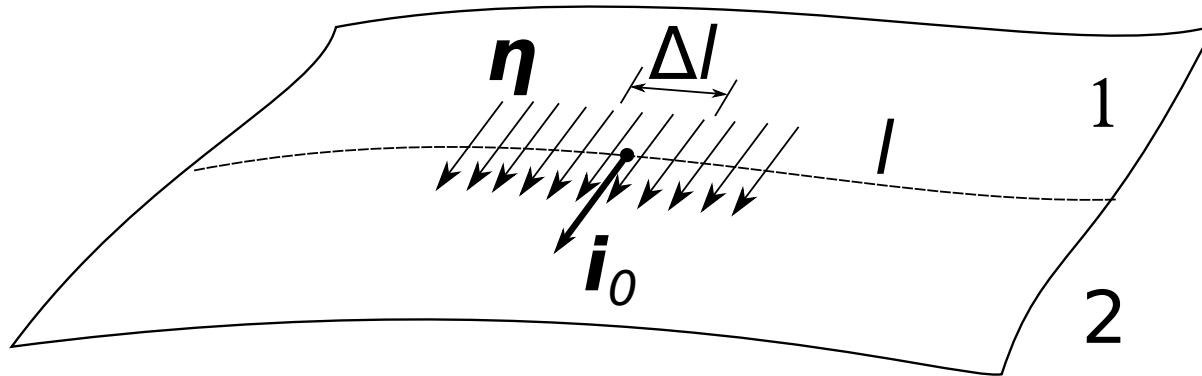


## Paviršinės srovės

Paviršinis srovės tankis pratekant elektros srovei  $\Delta I$  pro linijinį  $\Delta l$  ilgio segmentą jam statmena kryptimi  $\mathbf{i}_0$  yra

$$\eta = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \mathbf{i}_0 \cdot \frac{\Delta I}{\Delta l}.$$

(9)



Visa srovė suintegruota skerspjūvio plotu:

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_L \eta(l) dl f(h, \Delta) dh = \int_L \eta(l) dl.$$

4. Kraštinės sąlygos

Maksvelio lygtys

Paviršiniai krūviai (1)

Paviršiniai krūviai (2)

Paviršinės srovės

Paviršiaus geometrija

**D** kraštinės sąlygos

**B** kraštinės sąlygos

**H** kraštinės sąlygos (1)

**D** kraštinės sąlygos (2)

**E** kraštinės sąlygos

Izotropinės medžiagos

Izotropinės medžiagos

Laidininkai

Dielektriko plyšys

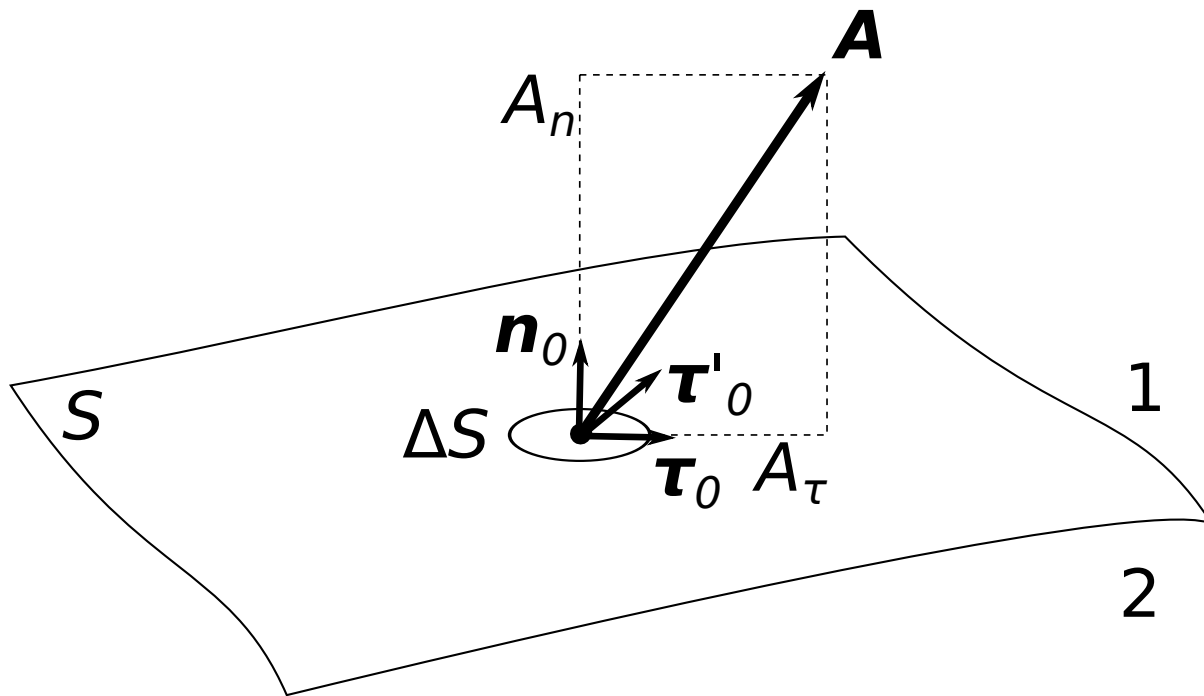
Apibendrinimas

Literatūra

## Paviršiaus geometrija

Elektromagnetinio lauko vektoriai nagrinėjami paviršiniame sluoksnyje, išskaidyti į normalines ir tangetines dedamąsias:

$$\mathbf{A} = \mathbf{n}_0 A_n + \boldsymbol{\tau}_0 A_\tau. \quad (10)$$



### 4. Kraštinės sąlygos

Maksvelio lygtys

Paviršiniai krūviai (1)

Paviršiniai krūviai (2)

Paviršinės srovės

**Paviršiaus geometrija**

**D** kraštinės sąlygos

**B** kraštinės sąlygos

**H** kraštinės sąlygos (1)

**D** kraštinės sąlygos (2)

**E** kraštinės sąlygos

Izotropinės medžiagos

Izotropinės medžiagos

Laidininkai

Dielektriko plyšys

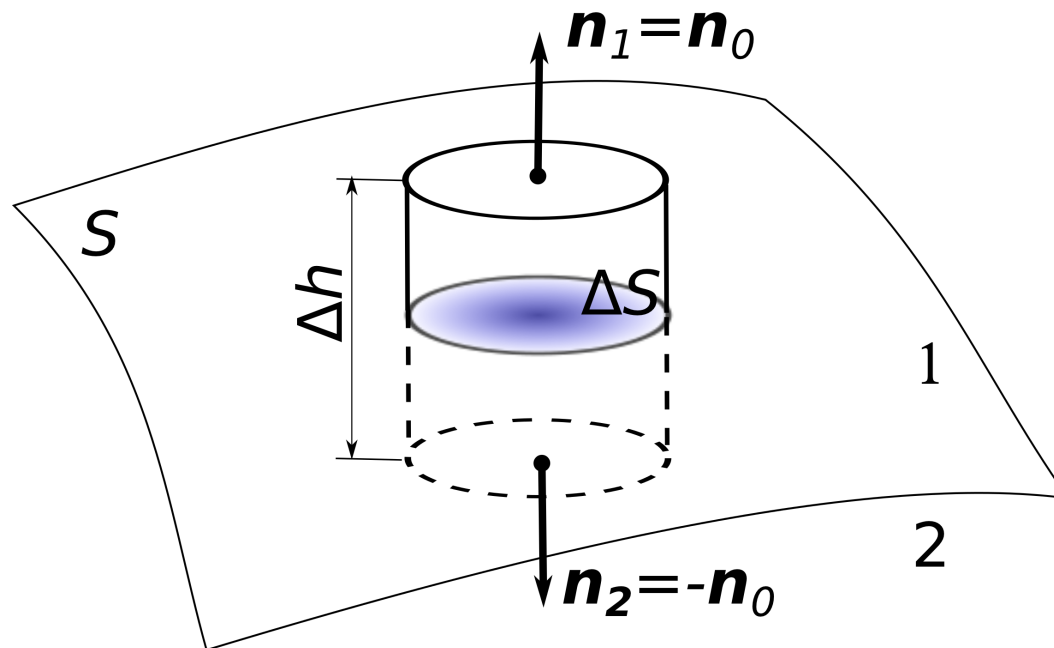
Apibendrinimas

Literatūra

# Elektrinės indukcijos vektoriaus kraštinės sąlygos

Gaunamos suintegravus III-iają Maksvelio lygtį:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho.$$



$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n}_0 = \xi.$$

(11)

Pereinant dviejų aplinkų skiriamąją ribą, elektrinės indukcijos vektoriaus statmenųjų skiriamajam paviršiui sandų skirtumas yra lygus riboje susikaupusio paviršinio krūvio tankiui.

4. Kraštinės sąlygos

Maksvelio lygtys

Paviršiniai krūviai (1)

Paviršiniai krūviai (2)

Paviršinės srovės

Paviršiaus geometrija

**D** kraštinės sąlygos

**B** kraštinės sąlygos

**H** kraštinės sąlygos (1)

**D** kraštinės sąlygos (2)

**E** kraštinės sąlygos

Izotropinės medžiagos

Izotropinės medžiagos

Laidininkai

Dielektriko plyšys

Apibendrinimas

Literatūra

## Magnetinės indukcijos vektoriaus kraštinės sąlygos

Kadangi III-ioji ir IV-oji Maksvelio lygtys panašios,

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

pakartoję tą patį išvedimą, gauname

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n}_0 = 0.$$

(12)

Pereinant dviejų aplinkų skiriamąją ribą, magnetinės indukcijos vektoriaus statmenieji skiriamajam paviršiui sandai nekinta.

4. Kraštinės sąlygos

Maksvelio lygtys

Paviršiniai krūviai (1)

Paviršiniai krūviai (2)

Paviršinės srovės

Paviršiaus geometrija

$\mathbf{D}$  kraštinės sąlygos

$\mathbf{B}$  kraštinės sąlygos

$\mathbf{H}$  kraštinės sąlygos (1)

$\mathbf{D}$  kraštinės sąlygos (2)

$\mathbf{E}$  kraštinės sąlygos

Izotropinės medžiagos

Izotropinės medžiagos

Laidininkai

Dielektriko plyšys

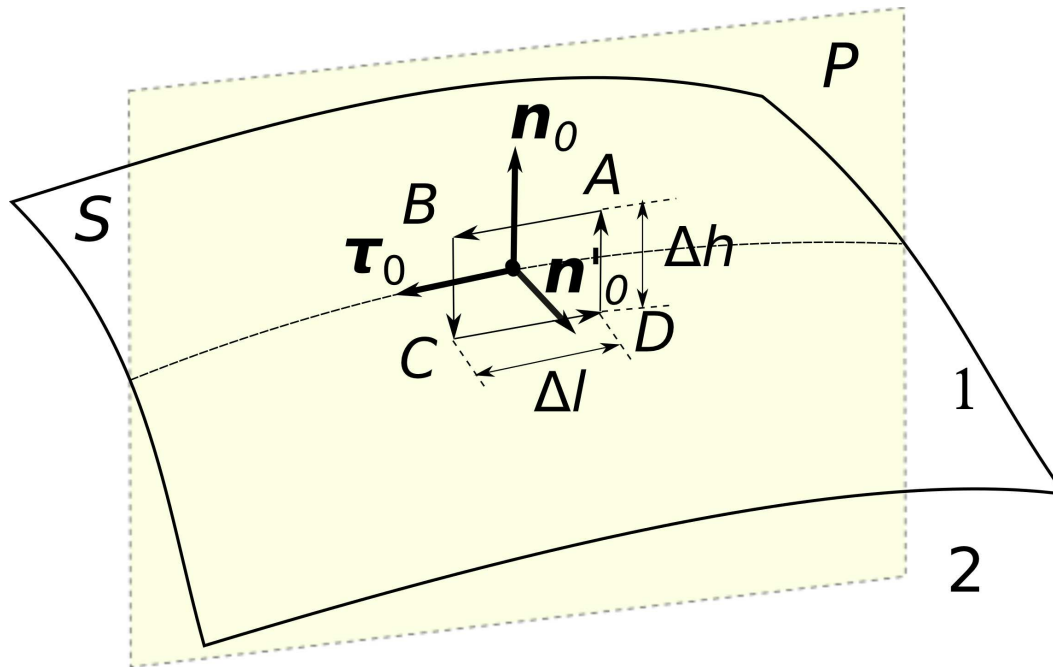
Apibendrinimas

Literatūra

## Magnetinio lauko stiprio vektoriaus kraštinės sąlygos (1)

Gaunamos suintegravus I-ąją Maksvelio lygtį uždaru kontūru ABCD plokštumoje, einančioje per skiriamąjį paviršiaus normalę,

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j},$$



panaudojant Stokso teorema,

$$\int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}.$$

### 4. Kraštinės sąlygos

Maksvelio lygtys

Paviršiniai krūviai (1)

Paviršiniai krūviai (2)

Paviršinės srovės

Paviršiaus geometrija

**D** kraštinės sąlygos

**B** kraštinės sąlygos

**H** kraštinės sąlygos (1)

**D** kraštinės sąlygos (2)

**E** kraštinės sąlygos

Izotropinės medžiagos

Izotropinės medžiagos

Laidininkai

Dielektriko plyšys

Apibendrinimas

Literatūra

## Magnetinio lauko stiprio vektoriaus kraštinės sąlygos (2)

### 4. Kraštinės sąlygos

Maksvelio lygtys

Paviršiniai krūviai (1)

Paviršiniai krūviai (2)

Paviršinės srovės

Paviršiaus geometrija

**D** kraštinės sąlygos

**B** kraštinės sąlygos

**H** kraštinės sąlygos (1)

**D** kraštinės sąlygos (2)

**E** kraštinės sąlygos

Izotropinės medžiagos

Izotropinės medžiagos

Laidininkai

Dielektriko plyšys

Apibendrinimas

Literatūra

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \boldsymbol{\tau}_0 = \eta \cdot \mathbf{n}'_0,$$

arba

$$[\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] = \eta.$$

Pereinant dviejų aplinkų skiriamąją ribą, skiriamajam paviršiui lygiagrečių magnetinio lauko vektoriaus sandų skirtumo modulis yra lygus paviršinės srovės tankio moduliui.

## Magnetinio lauko stiprio vektoriaus kraštinės sąlygos (2)

### 4. Kraštinės sąlygos

Maksvelio lygtys

Paviršiniai krūviai (1)

Paviršiniai krūviai (2)

Paviršinės srovės

Paviršiaus geometrija

**D** kraštinės sąlygos

**B** kraštinės sąlygos

**H** kraštinės sąlygos (1)

**D** kraštinės sąlygos (2)

**E** kraštinės sąlygos

Izotropinės medžiagos

Izotropinės medžiagos

Laidininkai

Dielektriko plyšys

Apibendrinimas

Literatūra

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \boldsymbol{\tau}_0 = \eta \cdot \mathbf{n}'_0,$$

arba

$$[\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] = \eta.$$

Pereinant dviejų aplinkų skiriamąją ribą, skiriamajam paviršiui lygiagrečių magnetinio lauko vektoriaus sandų skirtumo modulis yra lygus paviršinės srovės tankio moduliui.

*Kokios magnetinio lauko vektoriaus ir paviršinės srovės tankio kryptys?*

## Magnetinio lauko stiprio vektoriaus kraštinės sąlygos (2)

### 4. Kraštinės sąlygos

Maksvelio lygtys

Paviršiniai krūviai (1)

Paviršiniai krūviai (2)

Paviršinės srovės

Paviršiaus geometrija

$\mathbf{D}$  kraštinės sąlygos

$\mathbf{B}$  kraštinės sąlygos

$\mathbf{H}$  kraštinės sąlygos (1)

$\mathbf{D}$  kraštinės sąlygos (2)

$\mathbf{E}$  kraštinės sąlygos

Izotropinės medžiagos

Izotropinės medžiagos

Laidininkai

Dielektriko plyšys

Apibendrinimas

Literatūra

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \boldsymbol{\tau}_0 = \eta \cdot \mathbf{n}'_0,$$

arba

$$[\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] = \boldsymbol{\eta}.$$

Pereinant dviejų aplinkų skiriamąją ribą, skiriamajam paviršiui lygiagrečių magnetinio lauko vektoriaus sandų skirtumo modulis yra lygus paviršinės srovės tankio moduliui.

*Kokios magnetinio lauko vektoriaus ir paviršinės srovės tankio kryptys?*  
– Statmenos viena kitai.



## Elektrinio lauko stiprio vektoriaus kraštinės sąlygos

Kadangi I-oji ir II-oji Maksvelio lygtys panašios,

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\end{aligned}$$

pakartoję tą patį išvedimą, gauname

$$\begin{aligned}(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \boldsymbol{\tau}_0 &= 0, \\ \text{arba} \\ [\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] &= 0.\end{aligned}$$

Pereinant dviejų aplinkų skiriamąją ribą, skiriamajam paviršiui lygiagretūs elektrinio lauko vektoriaus sandai nekinta.

4. Kraštinės sąlygos

Maksvelio lygtys

Paviršiniai krūviai (1)

Paviršiniai krūviai (2)

Paviršinės srovės

Paviršiaus geometrija

$\mathbf{D}$  kraštinės sąlygos

$\mathbf{B}$  kraštinės sąlygos

$\mathbf{H}$  kraštinės sąlygos (1)

$\mathbf{D}$  kraštinės sąlygos (2)

$\mathbf{E}$  kraštinės sąlygos

Izotropinės medžiagos

Izotropinės medžiagos

Laidininkai

Dielektriko plyšys

Apibendrinimas

Literatūra

## Kraštinių sąlygų pavyzdžiai: izotropinės medžiagos

### 4. Kraštinės sąlygos

Maksvelio lygtys

Paviršiniai krūviai (1)

Paviršiniai krūviai (2)

Paviršinės srovės

Paviršiaus geometrija

**D** kraštinės sąlygos

**B** kraštinės sąlygos

**H** kraštinės sąlygos (1)

**D** kraštinės sąlygos (2)

**E** kraštinės sąlygos

Izotropinės medžiagos

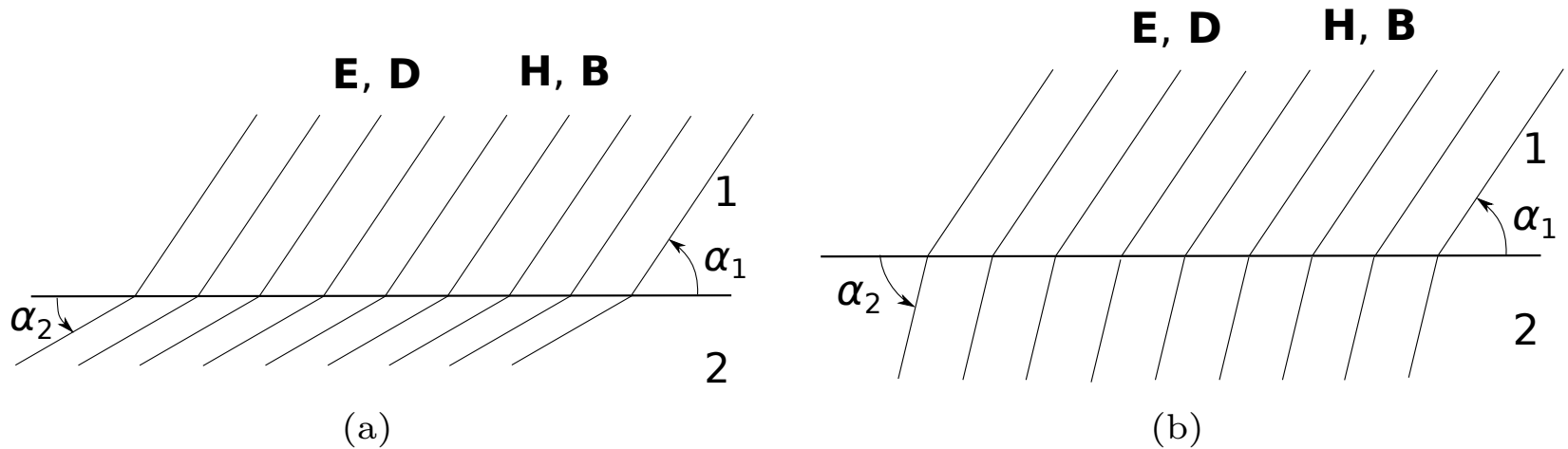
Izotropinės medžiagos

Laidininkai

Dielektriko plyšys

Apibendrinimas

Literatūra



1 pav.: Elektromagnetinių laukų jėgų linijos pereinant dviejų izotropinių medžiagų skiriamąjį paviršių: (a) kai  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ ,  $\mu_1 < \mu_2$ ; (b) kai  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ ,  $\mu_1 > \mu_2$ .  
 $\tan \alpha_1 / \tan \alpha_2 = \epsilon_2 / \epsilon_1$  arba  $\tan \alpha_1 / \tan \alpha_2 = \mu_2 / \mu_1$ .

## Kraštinių sąlygų pavyzdžiai: izotropinės medžiagos

### 4. Kraštinės sąlygos

Maksvelio lygtys

Paviršiniai krūviai (1)

Paviršiniai krūviai (2)

Paviršinės srovės

Paviršiaus geometrija

**D** kraštinės sąlygos

**B** kraštinės sąlygos

**H** kraštinės sąlygos (1)

**D** kraštinės sąlygos (2)

**E** kraštinės sąlygos

Izotropinės medžiagos

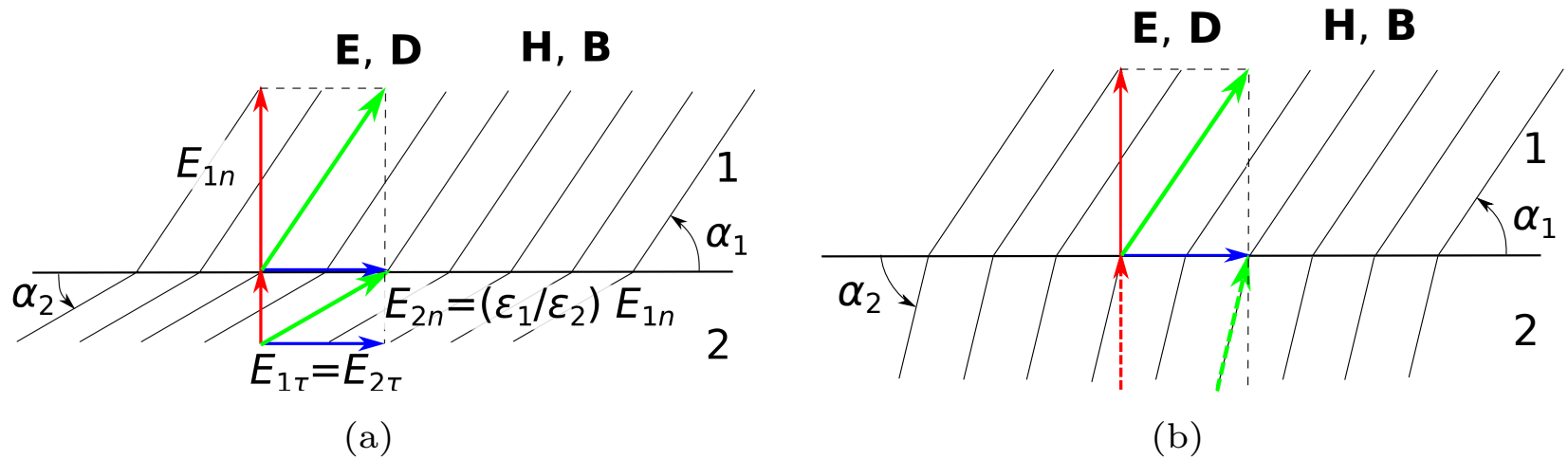
Izotropinės medžiagos

Laidininkai

Dielektriko plyšys

Apibendrinimas

Literatūra



2 pav.: Elektromagnetinių laukų jėgų linijos pereinant dviejų izotropinių medžiagų skiriamąjį paviršių: (a) kai  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ ,  $\mu_1 < \mu_2$ ; (b) kai  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ ,  $\mu_1 > \mu_2$ .  $\tan \alpha_1 / \tan \alpha_2 = \epsilon_2 / \epsilon_1$  arba  $\tan \alpha_1 / \tan \alpha_2 = \mu_2 / \mu_1$ .

## Kraštinių sąlygų pavyzdžiai: laidininko paviršius

### 4. Kraštinės sąlygos

Maksvelio lygtys

Paviršiniai krūviai (1)

Paviršiniai krūviai (2)

Paviršinės srovės

Paviršiaus geometrija

**D** kraštinės sąlygos

**B** kraštinės sąlygos

**H** kraštinės sąlygos (1)

**D** kraštinės sąlygos (2)

**E** kraštinės sąlygos

Izotropinės medžiagos

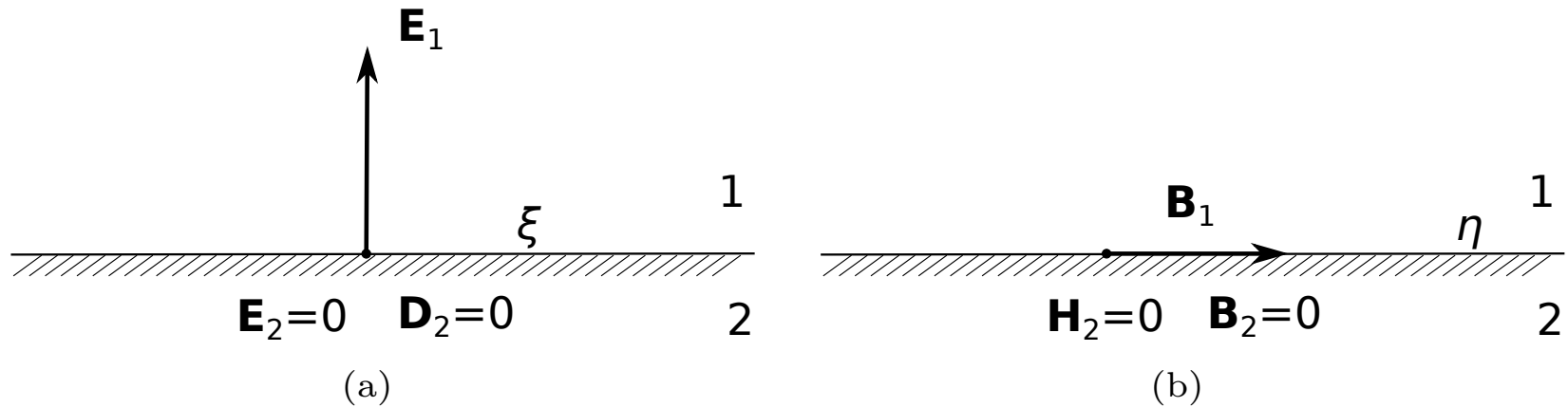
Izotropinės medžiagos

**Laidininkai**

Dielektriko plyšys

Apibendrinimas

Literatūra



3 pav.: Elektrinis (a) ir magnetinis (b) laukas laidininko paviršiuje.

## Kraštinių sąlygų pavyzdžiai: laidininko paviršius

### 4. Kraštinės sąlygos

Maksvelio lygtys

Paviršiniai krūviai (1)

Paviršiniai krūviai (2)

Paviršinės srovės

Paviršiaus geometrija

$\mathbf{D}$  kraštinės sąlygos

$\mathbf{B}$  kraštinės sąlygos

$\mathbf{H}$  kraštinės sąlygos (1)

$\mathbf{D}$  kraštinės sąlygos (2)

$\mathbf{E}$  kraštinės sąlygos

Izotropinės medžiagos

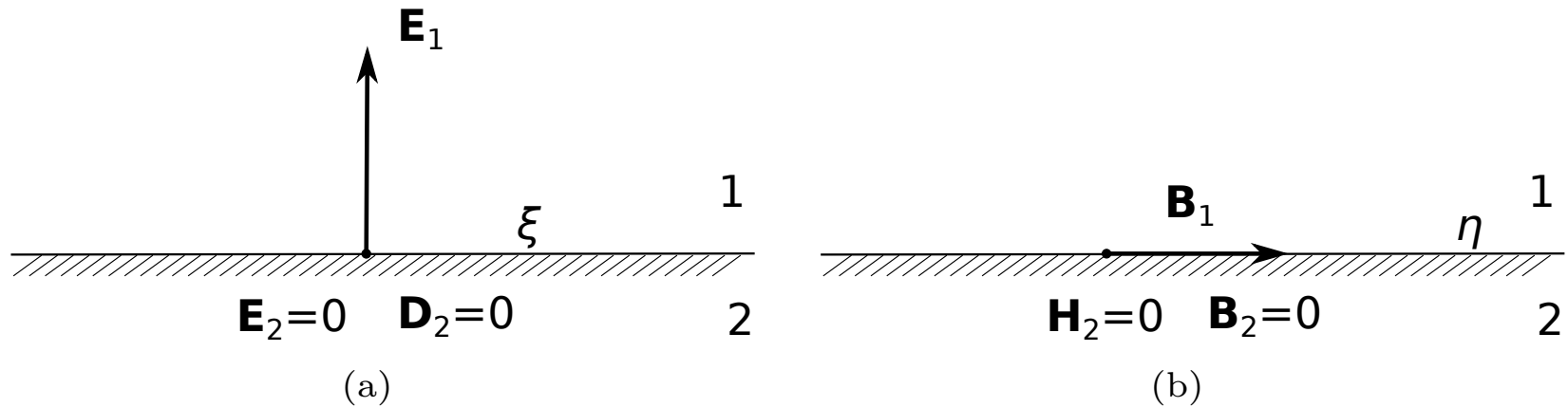
Izotropinės medžiagos

**Laidininkai**

Dielektriko plyšys

Apibendrinimas

Literatūra



3 pav.: Elektrinis (a) ir magnetinis (b) laukas laidininko paviršiuje.

Laidininko paviršiuje elektromagnetinis laukas egzistuoja dėl paviršinių krūvių ir srovių:

$$D_{1n} = \xi,$$

$$E_{1n} = \frac{\xi}{\epsilon_1},$$

$$H_{1\tau} = \eta \cdot \mathbf{n}'_0,$$

$$B_{1\tau} = \mu_1 \eta \cdot \mathbf{n}'_0.$$

## Kraštinių sąlygų pavyzdžiai: dielektriko plyšys

### 4. Kraštinės sąlygos

Maksvelio lygtys

Paviršiniai krūviai (1)

Paviršiniai krūviai (2)

Paviršinės srovės

Paviršiaus geometrija

**D** kraštinės sąlygos

**B** kraštinės sąlygos

**H** kraštinės sąlygos (1)

**D** kraštinės sąlygos (2)

**E** kraštinės sąlygos

Izotropinės medžiagos

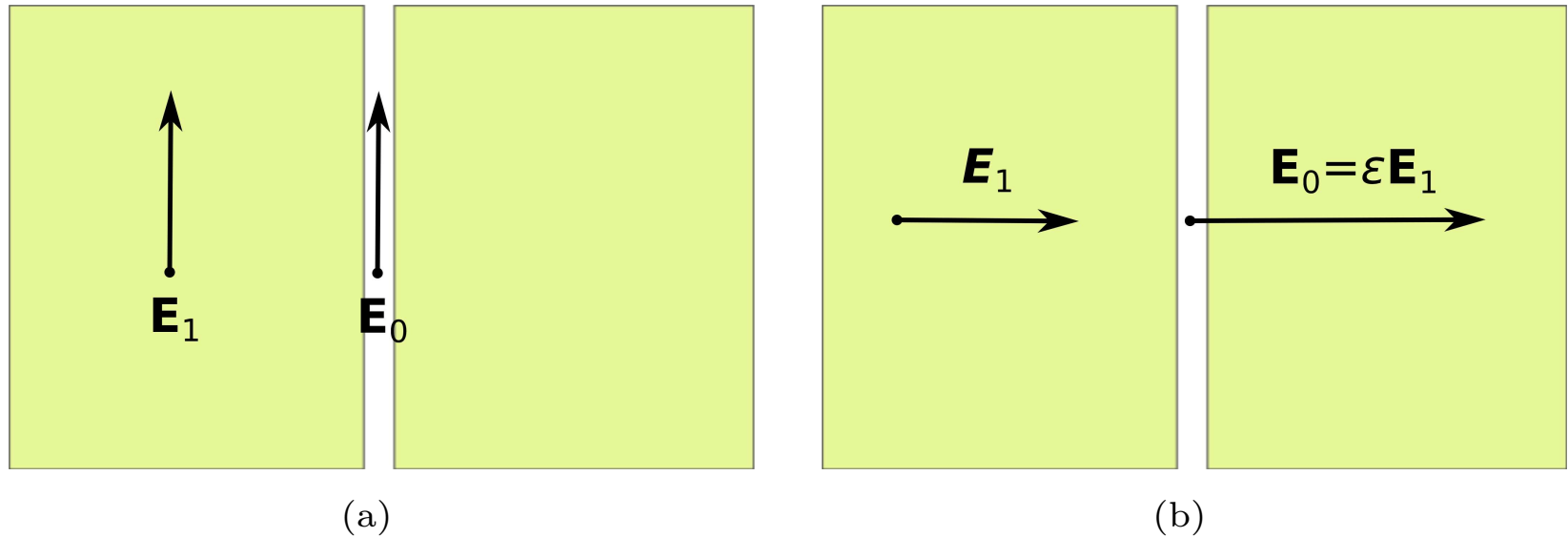
Izotropinės medžiagos

Laidininkai

Dielektriko plyšys

Apibendrinimas

Literatūra



4 pav.: Elektrinio lauko stiprio vektorius siaurame dielektriko plyšyje, kai laukas orientuotas lygiagrečiai (a) ir statmenai (b) plyšiui.

## Kraštinių sąlygų pavyzdžiai: dielektriko plyšys

### 4. Kraštinės sąlygos

Maksvelio lygtys

Paviršiniai krūviai (1)

Paviršiniai krūviai (2)

Paviršinės srovės

Paviršiaus geometrija

$\mathbf{D}$  kraštinės sąlygos

$\mathbf{B}$  kraštinės sąlygos

$\mathbf{H}$  kraštinės sąlygos (1)

$\mathbf{D}$  kraštinės sąlygos (2)

$\mathbf{E}$  kraštinės sąlygos

Izotropinės medžiagos

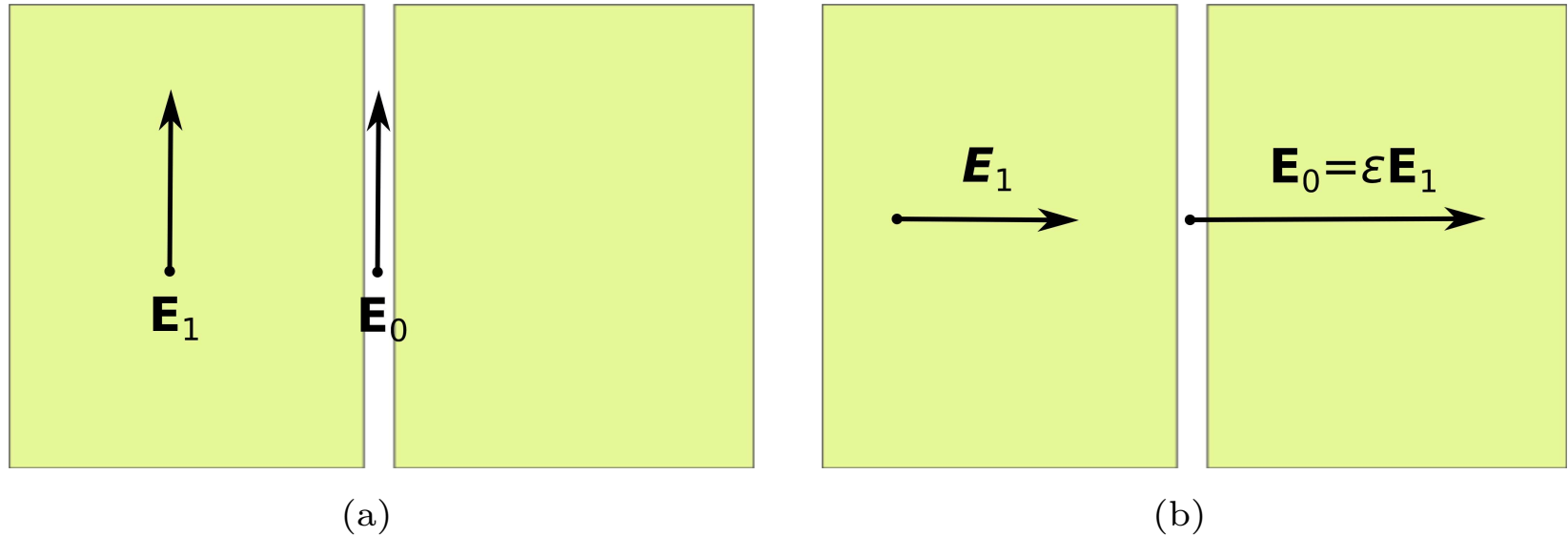
Izotropinės medžiagos

Laidininkai

Dielektriko plyšys

Apibendrinimas

Literatūra



4 pav.: Elektrinio lauko stiprio vektorius siaurame dielektriko plyšyje, kai laukas orientuotas lygiagrečiai (a) ir statmenai (b) plyšiui.

- Kai elektrinis laukas lygiagretus plyšiui:  $E_{0\tau} = E_{1\tau}$ ,
- Kai elektrinis laukas statmenas plyšiui (kai nėra paviršinių krūvių,  $\xi = 0$ ):  
 $D_{0n} = D_{1n}$ ,  $E_{0n} = \epsilon E_{1n}$ .

# Elektromagnetinio lauko kraštinių sąlygų apibendrinimas

Elektromagnetinio lauko kraštinės sąlygos dviejų medžiagų skiriamoje riboje:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) &= \xi, \\ \mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= 0, \\ \mathbf{n}_0 \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= \eta, \\ \mathbf{n}_0 \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= 0.\end{aligned}$$

Kai viena iš aplinkų yra laidininkas,  $\mathbf{E}_2 = 0$ ,  $\mathbf{H}_2 = 0$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{D}_1 &= D_n = \xi, \\ \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{B}_1 &= B_n = 0, \\ \mathbf{n}_0 \times \mathbf{H}_1 &= \eta, \\ \mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_1 &= 0.\end{aligned}$$

4. Kraštinės sąlygos

Maksvelio lygtys

Paviršiniai krūviai (1)

Paviršiniai krūviai (2)

Paviršinės srovės

Paviršiaus geometrija

$\mathbf{D}$  kraštinės sąlygos

$\mathbf{B}$  kraštinės sąlygos

$\mathbf{H}$  kraštinės sąlygos (1)

$\mathbf{D}$  kraštinės sąlygos (2)

$\mathbf{E}$  kraštinės sąlygos

Izotropinės medžiagos

Izotropinės medžiagos

Laidininkai

Dielektriko plyšys

Apibendrinimas

Literatūra



# Literatūra



[Rothwell and Cloud, 2008] Rothwell, E. and Cloud, M. (2008).  
*Electromagnetics*. CRC Press.

4. Kraštinės sąlygos

Maksvelio lygtys

Paviršiniai krūviai (1)

Paviršiniai krūviai (2)

Paviršinės srovės

Paviršiaus geometrija

**D** kraštinės sąlygos

**B** kraštinės sąlygos

**H** kraštinės sąlygos (1)

**D** kraštinės sąlygos (2)

**E** kraštinės sąlygos

Izotropinės medžiagos

Izotropinės medžiagos

Laidininkai

Dielektriko plyšys

Apibendrinimas

Literatūra

## 5. Pointingo teorema

Šiluminiai nuostoliai  
Elektromagnetinio lauko energijos balansas  
Izoliuotos sistemos energijos balanso lygtis  
Apibendrinta energijos balanso lygtis  
Energijos balanso pavyzdžiai grafiškai  
Energijos balansas apvaliam laidininkui  
Elektrinė ir magnetinė energija  
Lokalus balansas  
Literatūra

# 5. Pointingo teorema. Elektromagnetinio lauko energija

## Elektros srovės šiluminiai nuostoliai

Nagrinsime elektromagnetinio lauko energijos ir  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  vektorių sąryšius. Elektriniame lauke  $\mathbf{E}$  tekančios srovės  $\mathbf{j}$  šiluminiai nuostoliai tūryje  $V$  aprašomi

$$P = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dv = \int_V p dv, \quad (1)$$

čia

$$\boxed{p = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}.} \leftarrow \text{Šiluminių nuostolių galios tankis} \quad (2)$$

Ši išraiška analogiška Džaulio ir Lenco dėsniai  $P = IU$ .

5. Pointingo  
teorema

Šiluminiai  
nuostoliai

Elektromagnetinio  
lauko energijos  
balansas

Izoliuotos  
sistemos energijos  
balanso lygtis

Apibendrinta  
energijos balanso  
lygtis

Energijos balanso  
pavyzdžiai  
graifiškai

Energijos  
balansas apvaliam  
laidininkui  
Elektrinė ir  
magnetinė  
energija

Lokalus balansas

Literatūra

# Elektromagnetinio lauko energijos balansas

Pasinaudosime I-ąja ir II-ąja Maksvelio lygtimis

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4)$$

ir vektorinės analizės tapatybėmis:

$$\operatorname{div} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B},$$

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}, \quad \leftarrow \text{Gauso ir Ostrogradckio (divergencijos) teorema.}$$

5. Pointingo  
teorema

Šiluminiai  
nuostoliai

Elektromagnetinio  
lauko energijos  
balansas

Izoliuotos  
sistemos energijos  
balanso lygtis

Apibendrinta  
energijos balanso  
lygtis

Energijos balanso  
pavyzdžiai  
grafiškai

Energijos  
balansas apvaliam  
laidininkui  
Elektrinė ir  
magnetinė  
energija

Lokalus balansas

Literatūra

# Elektromagnetinio lauko energijos balansas

Pasinaudosime I-ąja ir II-ąja Maksvelio lygtimis

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4)$$

ir vektorinės analizės tapatybėmis:

$$\operatorname{div} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B},$$

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}, \quad \leftarrow \text{Gauso ir Ostrogradckio (divergencijos) teorema.}$$

Pointingo teorema integraliniame pavidale:

$$\int_V \operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \oint_S [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \cdot d\mathbf{s} = - \int_V \left( \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dv - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dv. \quad (5)$$

5. Pointingo  
teorema

Šiluminiai  
nuostoliai

Elektromagnetinio  
lauko energijos  
balansas

Izoliuotos  
sistemos energijos  
balanso lygtis

Apibendrinta  
energijos balanso  
lygtis

Energijos balanso  
pavyzdžiai  
grafiškai

Energijos  
balansas apvaliam  
laidininkui  
Elektrinė ir  
magnetinė  
energija

Lokalus balansas  
Literatūra

## Izoliuotos sistemos energijos balanso lygtis

Bet kokiai izoliuotai sistemai energijos balanso lygtis:

$$P = -\frac{dW}{dt}, \quad (6)$$

čia  $W$  – sistemos energija. Jei  $P > 0$ ,  $\frac{dW}{dt} < 0$  – sistemos energija mažėja.

Izoliuotai sistemai paviršiuje  $E_\tau = 0$  ir  $[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \cdot d\mathbf{s} = 0$ ,

5. Pointingo  
teorema  
Šiluminiai  
nuostoliai  
Elektromagnetinio  
lauko energijos  
balansas  
Izoliuotos  
sistemos energijos  
balanso lygtis  
Apibendrinta  
energijos balanso  
lygtis  
Energijos balanso  
pavyzdžiai  
grafiškai  
Energijos  
balansas apvaliam  
laidininkui  
Elektrinė ir  
magnetinė  
energija  
Lokalus balansas  
Literatūra

## Izoliuotos sistemos energijos balanso lygtis

Bet kokiai izoliuotai sistemai energijos balanso lygtis:

$$P = - \frac{dW}{dt}, \quad (6)$$

čia  $W$  – sistemos energija. Jei  $P > 0$ ,  $\frac{dW}{dt} < 0$  – sistemos energija mažėja.

Izoliuotai sistemai paviršiuje  $E_\tau = 0$  ir  $[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \cdot d\mathbf{s} = 0$ ,

energijos balanso lygtis izoliuotai sistemai:

$$P = - \int_V \left( \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dv, \quad (7)$$

elektromagnetinio lauko energijos kitimas izoliuotoje sistemoje:

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \left( \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dv. \quad (8)$$

5. Pointingo  
teorema  
Šiluminiai  
nuostoliai  
Elektromagnetinio  
lauko energijos  
balansas  
Izoliuotos  
sistemos energijos  
balanso lygtis  
Apibendrinta  
energijos balanso  
lygtis  
Energijos balanso  
pavyzdžiai  
graifiškai  
Energijos  
balansas apvaliam  
laidininkui  
Elektrinė ir  
magnetinė  
energija  
Lokalus balansas  
Literatūra

## Apibendrinta energijos balanso lygtis

Bendru atveju elektromagnetinio lauko energijos balanso lygtis:

$$P_S + \frac{dW}{dt} + P = 0,$$

(9)

$$P_S = \oint_S [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \cdot d\mathbf{s} \quad \leftarrow \text{Energijos srauto tankis pro paviršių } S$$

$$dW/dt \quad \leftarrow \text{Elektromagnetinio lauko energijos kitimas}$$

$$P \quad \leftarrow \text{Šiluminiai nuostoliai}$$

5. Pointingo  
teorema

Šiluminiai  
nuostoliai  
Elektromagnetinio  
lauko energijos  
balansas  
Izoliuotos  
sistemos energijos  
balanso lygtis  
Apibendrinta  
energijos balanso  
lygtis

Energijos balanso  
pavyzdžiai  
grafiškai  
Energijos  
balansas apvaliam  
laidininkui  
Elektrinė ir  
magnetinė  
energija  
Lokalus balansas  
Literatūra



## Apibendrinta energijos balanso lygtis

Bendru atveju elektromagnetinio lauko energijos balanso lygtis:

$$P_S + \frac{dW}{dt} + P = 0,$$

(9)

$$P_S = \oint_S [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \cdot d\mathbf{s} \quad \leftarrow \text{Energijos srauto tankis pro paviršių } S$$

$$dW/dt \quad \leftarrow \text{Elektromagnetinio lauko energijos kitimas}$$

$$P \quad \leftarrow \text{Šiluminiai nuostoliai}$$

Pažymėjus  $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$ ,  $\leftarrow$  Pointingo vektorius

(10)

$$P_S = \oint_S [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \cdot d\mathbf{s} = \oint_S \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{s}.$$

(11)

$P_S$  ir  $\mathbf{\Pi}$  parodo energijos mainus su aplinka:

- $P_S > 0$  – energija išteka iš tūrio  $V$ ,
- $P_S < 0$  – energija priteka į tūrį  $V$ .

5. Pointingo teorema  
Šiluminiai nuostoliai  
Elektromagnetinio lauko energijos balansas  
Izoliuotos sistemos energijos balanso lygtis  
Apibendrinta energijos balanso lygtis  
Energijos balanso pavyzdžiai grafiškai  
Energijos balansas apvaliam laidininkui  
Elektrinė ir magnetinė energija  
Lokalus balansas  
Literatūra

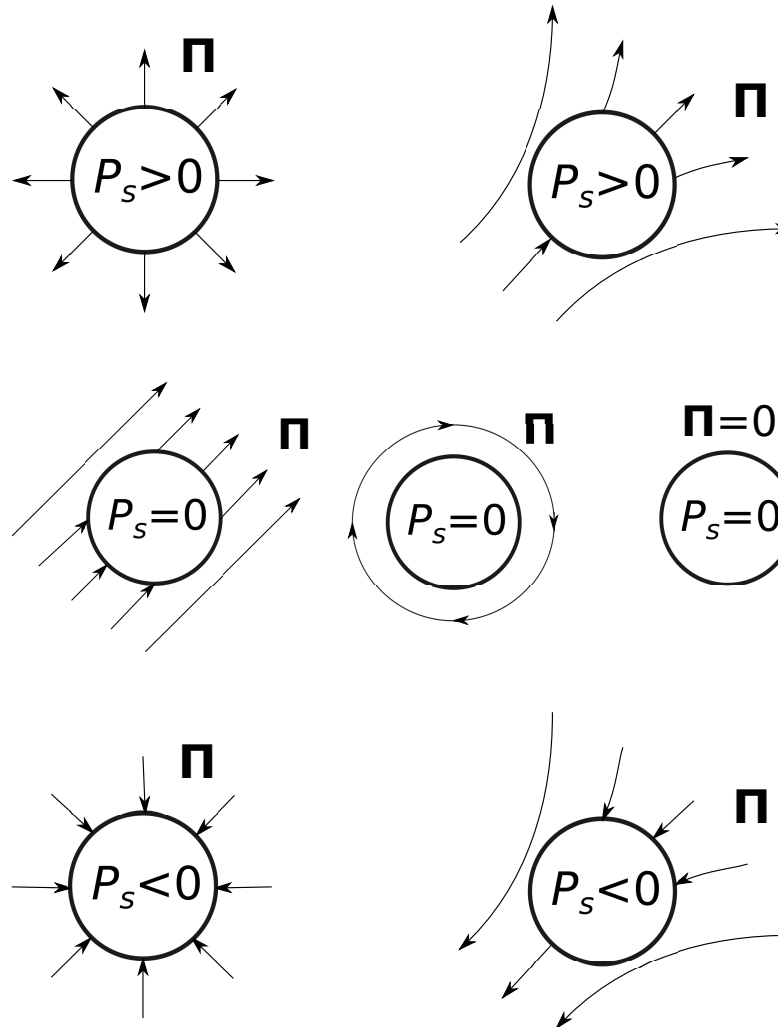
# Energijos balanso pavyzdžiai grafiškai

## 5. Pointingo teorema

Šiluminiai nuostoliai  
Elektromagnetinio lauko energijos balansas  
Izoliuotos sistemos energijos balanso lygtis  
Apibendrinta energijos balanso lygtis

## Energijos balanso pavyzdžiai grafiškai

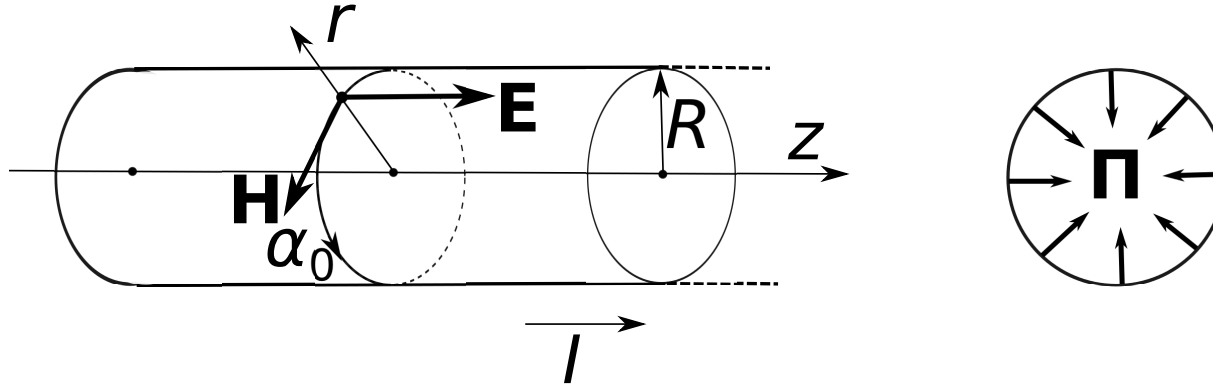
Energijos balansas apvaliam laidininkui  
Elektrinė ir magnetinė energija  
Lokalus balansas  
Literatūra



1 pav.: Elektromagnetinio lauko energijos balansas: aktyvus (viršuje), neutralus (viduryje) ir pasyvus (apačioje).

## Energijos balansas apvaliam laidininkui

Panagrinesime energijos balansą srovei tekant apvaliu laidininku.

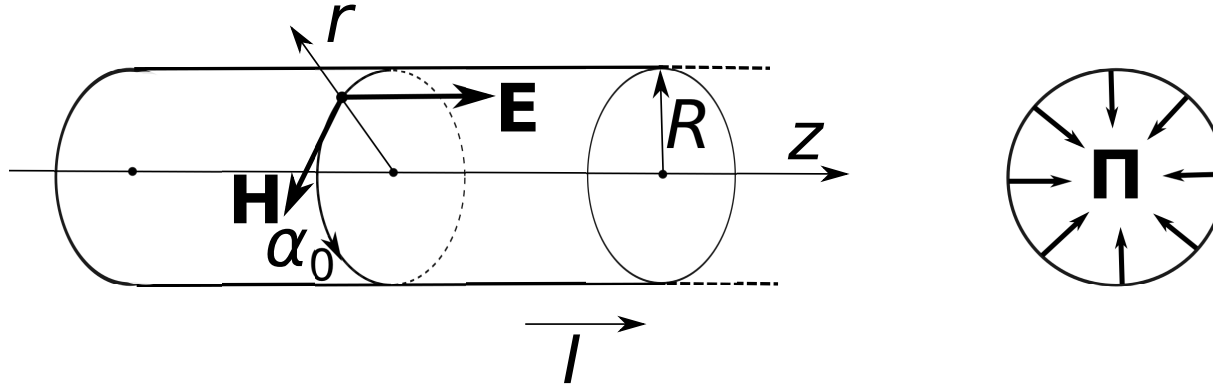


Laidininku teka srovės tankis  $j_z = \sigma E_z$ , kuris kuria magnetinį lauką  $H_\alpha = \frac{I}{2\pi r}$ .

5. Pointingo  
teorema  
Šiluminiai  
nuostoliai  
Elektromagnetinio  
lauko energijos  
balansas  
Izoliuotos  
sistemos energijos  
balanso lygtis  
Apibendrinta  
energijos balanso  
lygtis  
Energijos balanso  
pavyzdžiai  
grafiškai  
Energijos  
balansas apvaliam  
laidininkui  
Elektrinė ir  
magnetinė  
energija  
Lokalus balansas  
Literatūra

## Energijos balansas apvaliam laidininkui

Panagrinesime energijos balansą srovei tekant apvaliu laidininku.



Laidininku teka srovės tankis  $j_z = \sigma E_z$ , kuris kuria magnetinį lauką  $H_\alpha = \frac{I}{2\pi r}$ .

Elektromagnetinio lauko Pointingo vektorius

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = -\mathbf{r}_0 E_z H_\alpha$$

yra nukreiptas į laidininko vidų, t.y. vyksta energijos pritekėjimas.

5. Pointingo  
teorema

Šiluminiai  
nuostoliai  
Elektromagnetinio  
lauko energijos  
balansas

Izoliuotos  
sistemos energijos  
balanso lygtis

Apibendrinta  
energijos balanso  
lygtis

Energijos balanso  
pavyzdžiai  
graifiškai

**Energijos  
balansas apvaliam  
laidininkui**

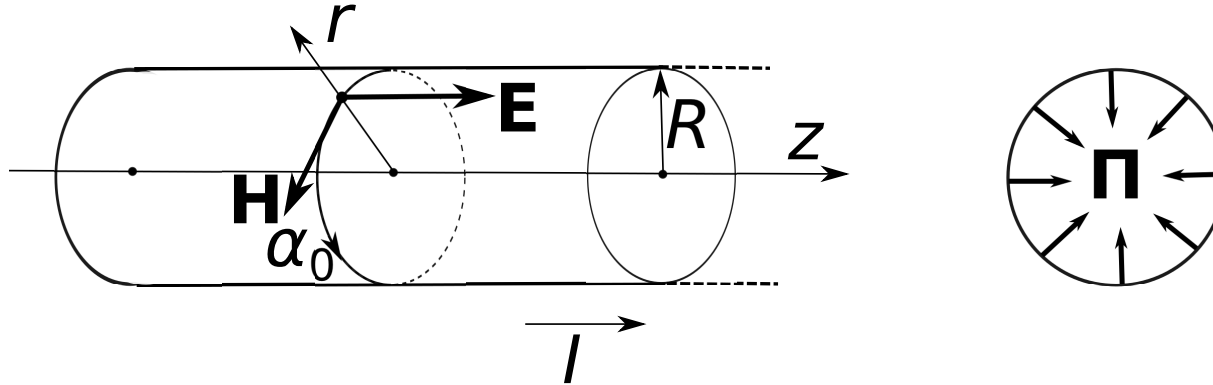
Elektrinė ir  
magnetinė  
energija

Lokalus balansas

Literatūra

## Energijos balansas apvaliam laidininkui

Panagrinėsime energijos balansą srovei tekant apvaliu laidininku.



Laidininku teka srovės tankis  $j_z = \sigma E_z$ , kuris kuria magnetinį lauką  $H_\alpha = \frac{I}{2\pi r}$ .

Elektromagnetinio lauko Pointingo vektorius

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = -\mathbf{r}_0 E_z H_\alpha$$

yra nukreiptas į laidininko vidų, t.y. vyksta energijos pritekėjimas.

Apskaičiavę Pointingo vektoriaus srautą pro laidininko paviršių, gauname Džaulio ir Lenco dėsnį:

$$P_S = \oint_S \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{s} = -IU.$$

5. Pointingo teorema  
 Šiluminiai nuostoliai  
 Elektromagnetinio lauko energijos balansas  
 Izoliuotos sistemos energijos balanso lygtis  
 Apibendrinta energijos balanso lygtis  
 Energijos balanso pavyzdžiai grafiškai  
 Energijos balansas apvaliam laidininkui  
 Elektrinė ir magnetinė energija  
 Lokalus balansas  
 Literatūra

# Elektrinė ir magnetinė energija

Pasinaudojus medžiagos lygtimis

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad (12)$$

iš pilnutinės elektromagnetinio lauko energijos

5. Pointingo  
teorema

Šiluminiai  
nuostoliai  
Elektromagnetinio  
lauko energijos  
balansas  
Izoliuotos  
sistemos energijos  
balanso lygtis  
Apibendrinta  
energijos balanso  
lygtis  
Energijos balanso  
pavyzdžiai  
grafiškai  
Energijos  
balansas apvaliam  
laidininkui  
Elektrinė ir  
magnetinė  
energija  
Lokalus balansas  
Literatūra

## Elektrinė ir magnetinė energija

Pasinaudojus medžiagos lygtimis

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (12)$$

iš pilnutinės elektromagnetinio lauko energijos

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) dv = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dv \quad (13)$$

galima išskirti elektrinę ir magnetinę energijas:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \mathbf{E}^2 dv = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv, \quad \leftarrow \text{Elektrinė energija}$$
$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mu \mathbf{H}^2 dv = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv. \quad \leftarrow \text{Magnetinė energija}$$

5. Pointingo  
teorema

Šiluminiai  
nuostoliai  
Elektromagnetinio  
lauko energijos  
balansas  
Izoliuotos  
sistemos energijos  
balanso lygtis  
Apibendrinta  
energijos balanso  
lygtis  
Energijos balanso  
pavyzdžiai  
graifiškai  
Energijos  
balansas apvaliam  
laidininkui  
Elektrinė ir  
magnetinė  
energija  
Lokalus balansas  
Literatūra

## Elektromagnetinės energijos tankis, lokalus balansas

$W$  pointegralinė išraiška yra elektromagnetinės energijos tankis:

$$w = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{1}{2}(\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}). \quad (14)$$

Parašysim Pointingo teoremą energijos tankiams:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{\Pi} + \frac{\partial w}{\partial t} + p = 0,} \quad \leftarrow \text{Diferencialinė Pointingo teorema} \quad (15)$$

tai – diferencialinė energijos balanso lygtis, parodanti lokalų energijos kitimą.  
Analogiška srovės tolydumo lygčiai, išskyrus  $p$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (16)$$

Kadangi srovės atveju  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  reiškia krūvio judėjimą, tokiu pat būdu

$$\mathbf{\Pi} = w \mathbf{v} \quad (17)$$

reiškia elektromagnetinio lauko energijos judėjimą, čia  $\mathbf{v}$  – energijos judėjimo greitis.

Vadinasi, suradę  $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$  ir  $w = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$ , galime nustatyti elektromagnetinio lauko energijos judėjimo greitį ir kryptį.

5. Pointingo teorema  
Šiluminiai nuostoliai  
Elektromagnetinio lauko energijos balansas  
Izoliuotos sistemos energijos balanso lygtis  
Apibendrinta energijos balanso lygtis  
Energijos balanso pavyzdžiai grafiškai  
Energijos balansas apvaliam laidininkui  
Elektrinė ir magnetinė energija  
Lokalus balansas  
Literatūra



## Literatūra



### 5. Pointingo teorema

Šiluminiai nuostoliai  
Elektromagnetinio lauko energijos balansas  
Izoliuotos sistemos energijos balanso lygtis  
Apibendrinta energijos balanso lygtis  
Energijos balanso pavyzdžiai grafiškai  
Energijos balansas apvaliam laidininkui  
Elektrinė ir magnetinė energija  
Lokalus balansas

### Literatūra

[Nikolskij and Nikolskaya, 1989] Nikolskij, V. and Nikolskaya, T. (1989). *Elektrodinamika i rasprostranenie radiovoln*. Moskva: Nauka.

[Stratton, 1941] Stratton, J. (1941). *Electromagnetic theory*. McGraw-Hill.

6. Maksvelio 1.  
kompleksiniame  
pavidale

Harmoniniai  
virpesiai ir Furjė  
transformacija  
Maksvelio lygtys  
kompleksiniame  
pavidale  
Priežastingumas  
ir kompleksinė  
skvarba  
Kramerso ir  
Kronigo  
dispersijos  
sąryšiai  
Elektrinės  
indukcijos fazinis  
vėlavimas  
Literatūra

**6. Maksvelio lygtys  
kompleksiniame pavidale.  
Kompleksinė skvarba**

## Harmoniniai virpesiai ir Furjė transformacija

Nagrinsime elektromagnetinius laukus, kintančius pagal harmoninį dėsnį:

$$a(t) = a_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

čia  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  yra ciklinis dažnis,  $T$  – periodas,  $a(t + T) = a(t)$ .

Naudosime Furjė atvaizdavimą

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2)$$

kuris egzistuoja, jei  $a(t)$  yra kvadratiškai integruojama ( $L_2$  funkcija):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega < \infty. \quad \leftarrow \text{Parsevalio lygybė} \quad (3)$$

Furjė transformaciją pritaikysime elektromagnetiniam laukui:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_p, \quad (4)$$

čia  $\mathbf{j}_p$  – pašalinių neelektromagnetinių jėgų kuriama srovė.

## Maksvelio lygtys kompleksiniame pavidale

Pritaikę Furjė transformaciją harmoniškai kintančiam elektromagnetiniam laukui, gauname

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega), \quad (5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega), \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \rho(\mathbf{r}, \omega) \quad (8)$$

Pasinaudosime (5) Maksvelio lygtimi kompleksinės skvarbos išraiškai gauti su sąlygomis:

$$\epsilon(t) = \epsilon = \text{const}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E},$$

$$\sigma(t) = \sigma = \text{const}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_p.$$

6. Maksvelio 1.  
kompleksiniame  
pavidale

Harmoniniai  
virpesiai ir Furjė  
transformacija

Maksvelio lygtys  
kompleksiniame  
pavidale

Priežastingumas  
ir kompleksinė  
skvarba

Kramerso ir  
Kronigo  
dispersijos

sąryšiai

Elektrinės  
indukcijos fazinis  
vėlavimas

Literatūra

## Maksvelio lygtys kompleksiniame pavidale

Pritaikę Furjė transformaciją harmoniškai kintančiam elektromagnetiniam laukui, gauname

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega), \quad (5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega), \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \rho(\mathbf{r}, \omega) \quad (8)$$

Pasinaudosime (5) Maksvelio lygtimi kompleksinės skvarbos išraiškai gauti su sąlygomis:

$$\epsilon(t) = \epsilon = \text{const}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E},$$

$$\sigma(t) = \sigma = \text{const}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_p.$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \tilde{\epsilon} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{j}_p(\mathbf{r}, \omega), \quad (9)$$

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon - i \frac{\sigma}{\omega}. \quad \leftarrow \text{Kompleksinė skvarba} \quad (10)$$

6. Maksvelio 1.  
kompleksiniame  
pavidale

Harmoniniai  
virpesiai ir Furjė  
transformacija

Maksvelio lygtys  
kompleksiniame  
pavidale

Priežastingumas  
ir kompleksinė  
skvarba

Kramerso ir  
Kronigo  
dispersijos

sąryšiai

Elektrinės  
indukcijos fazinis  
vėlavimas

Literatūra

## Priežastingumas ir kompleksinė skvarba

Remsimės prielaidomis:

1. Pasekmė visada seka po priežasties.
2. Superpozicijos principas: praeityje sukeltos pasekmės susideda su atitinkamais įtakos koeficientais ir nulemia dabartyje vykstantį procesą.
3. Sąveika yra invariantinė laiko postūmio požiūriu.

6. Maksvelio 1. kompleksiniame pavidale  
Harmoniniai virpesiai ir Furjė transformacija  
Maksvelio lygtys kompleksiniame pavidale  
Priežastingumas ir kompleksinė skvarba  
Kramerso ir Kronigo dispersijos sąryšiai  
Elektrinės indukcijos fazinis vėlavimas  
Literatūra

## Priežastingumas ir kompleksinė skvarba

Remsimės prielaidomis:

1. Pasekmė visada seka po priežasties.
2. Superpozicijos principas: praeityje sukeltos pasekmės susideda su atitinkamais įtakos koeficientais ir nulemia dabartyje vykstantį procesą.
3. Sąveika yra invariantinė laiko postūmio požiūriu.

Tada elektrinio lauko indukciją galima aprašyti:

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \epsilon(t-t') \mathbf{E}(t') dt', \quad t > t', \quad \epsilon(t) = 0, \text{ kai } t < 0. \quad (11)$$

Dėl priežastingumo principo dielektrinė skvarba  $\tilde{\epsilon}$  tampa kompleksiniu dydžiu:

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\epsilon}(\omega) \mathbf{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (12)$$

$$\tilde{\epsilon}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \epsilon' - i\epsilon''. \quad (13)$$

6. Maksvelio 1. kompleksiniame pavidale  
Harmoniniai virpesiai ir Furjė transformacija  
Maksvelio lygtys kompleksiniame pavidale  
Priežastingumas ir kompleksinė skvarba  
Kramerso ir Kronigo dispersijos sąryšiai  
Elektrinės indukcijos fazinis vėlavimas  
Literatūra

## Kramerso ir Kronigo dispersijos sąryšiai

Įrodysime, kad  $\tilde{\epsilon}(\tilde{\omega})$  yra analizinė funkcija kompleksinio dažnio  $\tilde{\omega} = \omega - i\gamma$  plokštumoje.

Pasinaudosime Koši ir Rymano sąlygomis analizinei funkcijai

$f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$  nustatyti:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (15)$$

Koši ir Rymano sąlygos susieja relią ir menamą  $\tilde{\epsilon}$  dalis [Jackson, 1999]:

$$\tilde{\epsilon}(\omega) = u(\omega) + i v(\omega),$$

$$u(\omega) = \epsilon_0 + \frac{1}{\pi} \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega',$$

$$v(\omega) = \frac{\epsilon_0}{\pi} \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\omega') - \epsilon_0}{\omega' - \omega} d\omega',$$

← Tai Kramerso ir Kronigo dispersijos sąryšiai

čia  $\wp$  reiškia integralo pagrindinę reikšmę pagal Koši.

6. Maksvelio 1.  
kompleksiniame  
pavidale  
Harmoniniai  
virpesiai ir Furjė  
transformacija  
Maksvelio lygtys  
kompleksiniame  
pavidale  
Priežastingumas  
ir kompleksinė  
skvarba  
Kramerso ir  
Kronigo  
dispersijos  
sąryšiai  
Elektrinės  
indukcijos fazinis  
vėlavimas  
Literatūra



## Elektrinės indukcijos fazinis vėlavimas

Dėl kompleksinės skvarbos  $\tilde{\epsilon} = \epsilon' - i\epsilon''$  atsirandantis fazinis vėlavimas:

$$\mathbf{D}(\omega)e^{i\omega t} = \tilde{\epsilon}\mathbf{E}(\omega)e^{i\omega t} \quad (16)$$

$$= |\tilde{\epsilon}|\mathbf{E}(\omega)e^{i\omega\left(t - \frac{1}{\omega} \arctan \frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)}, \quad (17)$$

čia  $\Delta t = \frac{1}{\omega} \arctan \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$  – fazinis vėlinimas.

6. Maksvelio 1.  
kompleksiniame  
pavidale

Harmoniniai  
virpesiai ir Furjė  
transformacija  
Maksvelio lygtys  
kompleksiniame  
pavidale

Priežastingumas  
ir kompleksinė  
skvarba  
Kramerso ir  
Kronigo  
dispersijos  
sąryšiai

Elektrinės  
indukcijos fazinis  
vėlavimas

Literatūra

## Literatūra

6. Maksvelio l.  
kompleksiniame  
pavidale

Harmoniniai  
virpesiai ir Furjė  
transformacija  
Maksvelio lygtys  
kompleksiniame  
pavidale  
Priežastingumas  
ir kompleksinė  
skvarba  
Kramerso ir  
Kronigo  
dispersijos  
sąryšiai  
Elektrinės  
indukcijos fazinis  
vėlavimas

Literatūra



[Jackson, 1999] Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics*.  
Wiley.

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui

Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai  
Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas  
Vektorinių dydžių  
vidurkiai  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)  
Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia  
Literatūra

## 7. Pointingo teorema harmoniškai kintančiam elektromagnetiniam laukui

# Harmoniškai kintančių fizikinių dydžių vidurkiai

Skaičiuosime harmoniškai kintančios funkcijos kvadrato vidurkį:

$$a(t) = a_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1), \quad (1)$$

$$\langle a^2(t) \rangle = \frac{a_0^2}{2}. \quad (2)$$

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui

Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai

Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas

Vektorinių dydžių  
vidurkiai

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)

Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia

Literatūra

## Harmoniškai kintančių fizikinių dydžių vidurkiai

Skaičiuosime harmoniškai kintančios funkcijos kvadrato vidurkį:

$$a(t) = a_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1), \quad (1)$$

$$\langle a^2(t) \rangle = \frac{a_0^2}{2}. \quad (2)$$

Dviejų harmoniškai kintančių funkcijų sandaugos vidurkis:

$$b(t) = b_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2), \quad (3)$$

$$\langle a(t) b(t) \rangle = \frac{a_0 b_0}{2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (4)$$

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui

Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai

Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas  
Vektorinių dydžių  
vidurkiai  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)

Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia

Literatūra

## Kompleksinių amplitudžių metodas

Harmoniškai kintančią funkciją galima aprašyti kompleksiniais dydžiais:

$$a(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{a}(t)\}, \quad \tilde{a}(t) = \tilde{a}_0 e^{i\omega t} = a_0 e^{i\varphi_1} e^{i\omega t}, \quad (5)$$

čia  $\tilde{a}_0 = a_0 e^{i\varphi_1}$  – kompleksinė amplitudė.

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui

Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai

Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas

Vektorinių dydžių  
vidurkiai

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)

Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia

Literatūra

## Kompleksinių amplitudžių metodas

Harmoniškai kintančią funkciją galima aprašyti kompleksiniais dydžiais:

$$a(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{a}(t)\}, \quad \tilde{a}(t) = \tilde{a}_0 e^{i\omega t} = a_0 e^{i\varphi_1} e^{i\omega t}, \quad (5)$$

čia  $\tilde{a}_0 = a_0 e^{i\varphi_1}$  – kompleksinė amplitudė.

Naudingas sąryšis:

$$a(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{a}(t)\} = \frac{1}{2} (\tilde{a}(t) + \tilde{a}^*(t)). \quad (6)$$

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui

Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai

Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas

Vektorinių dydžių  
vidurkiai

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)

Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia

Literatūra

## Kompleksinių amplitudžių metodas

Harmoniškai kintančią funkciją galima aprašyti kompleksiniais dydžiais:

$$a(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{a}(t)\}, \quad \tilde{a}(t) = \tilde{a}_0 e^{i\omega t} = a_0 e^{i\varphi_1} e^{i\omega t}, \quad (5)$$

čia  $\tilde{a}_0 = a_0 e^{i\varphi_1}$  – kompleksinė amplitudė.

Naudingas sąryšis:

$$a(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{a}(t)\} = \frac{1}{2} (\tilde{a}(t) + \tilde{a}^*(t)). \quad (6)$$

Harmoninių funkcijų vidurkiai išreikšti kompleksinėmis amplitudėmis:

$$\langle a^2(t) \rangle = \frac{\tilde{a}_0 \tilde{a}_0^*}{2}, \quad (7)$$

$$\langle a(t) b(t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\tilde{a}_0^*(t) \tilde{b}_0(t)\}. \quad (8)$$

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui

Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai

Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas

Vektorinių dydžių  
vidurkiai

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)

Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia

Literatūra



## Vektorinių dydžių vidurkiai

Harmoniškai kintantys vektoriniai dydžiai:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) = \operatorname{Re}\{\tilde{\mathbf{A}}(t)\} = \operatorname{Re}\{\tilde{\mathbf{A}}_0 e^{i\omega t}\}, \quad (9)$$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) = \operatorname{Re}\{\tilde{\mathbf{B}}(t)\} = \operatorname{Re}\{\tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i\omega t}\}. \quad (10)$$

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui

Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai

Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas

Vektorinių dydžių  
vidurkiai

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)

Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia

Literatūra

## Vektorinių dydžių vidurkiai

Harmoniškai kintantys vektoriniai dydžiai:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) = \operatorname{Re}\{\tilde{\mathbf{A}}(t)\} = \operatorname{Re}\{\tilde{\mathbf{A}}_0 e^{i\omega t}\}, \quad (9)$$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) = \operatorname{Re}\{\tilde{\mathbf{B}}(t)\} = \operatorname{Re}\{\tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i\omega t}\}. \quad (10)$$

Vektorinių dydžių vidurkiai išreikšti kompleksinėmis amplitudėmis:

$$\langle \mathbf{A}^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{A}}_0 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_0^*, \quad (11)$$

$$\langle \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t) \rangle = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{A}}_0 \cdot \tilde{\mathbf{B}}_0^*, \quad \leftarrow \text{Skaliarinės sandaugos vidurkis} \quad (12)$$

$$\langle \mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t) \rangle = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{A}}_0 \times \tilde{\mathbf{B}}_0^*. \quad \leftarrow \text{Vektorinės sandaugos vidurkis} \quad (13)$$

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui

Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai

Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas

Vektorinių dydžių  
vidurkiai

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)

Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia

Literatūra

# Pointingo teorema harmoniškai kintančiam elektromagnetiniam laukui (1)

Turėjome bendrą Pointingo teoremą diferencialiniu pavidalu:

$$\operatorname{div} \mathbf{\Pi} + \frac{\partial w}{\partial t} + p = 0, \quad (14)$$

čia

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad \leftarrow \text{Pointingo vektorius} \quad (15)$$

$$w = \frac{1}{2} (\epsilon \mathbf{E}^* + \mu \mathbf{H}^*), \quad \leftarrow \text{Elektromagnetinės energijos tankis} \quad (16)$$

$$p = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad \leftarrow \text{Šiluminių nuostolių galios tankis} \quad (17)$$

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui

Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai

Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas

Vektorinių dydžių  
vidurkiai

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)

Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)

Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia

Literatūra

# Pointingo teorema harmoniškai kintančiam elektromagnetiniam laukui (1)

Turėjome bendrą Pointingo teoremą diferencialiniu pavidalu:

$$\operatorname{div} \mathbf{\Pi} + \frac{\partial w}{\partial t} + p = 0, \quad (14)$$

čia

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad \leftarrow \text{Pointingo vektorius} \quad (15)$$

$$w = \frac{1}{2} (\epsilon \mathbf{E}^* + \mu \mathbf{H}^*), \quad \leftarrow \text{Elektromagnetinės energijos tankis} \quad (16)$$

$$p = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad \leftarrow \text{Šiluminių nuostolių galios tankis} \quad (17)$$

Apskaičiuosime šių dydžių vidurkius harmoniškai kintančiam elektromagnetiniam laukui:

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i\omega t}, \quad \mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}}_0 e^{i\omega t}, \quad \mathbf{j} = \tilde{\mathbf{j}}_0 e^{i\omega t}.$$

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui  
Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai  
Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas  
Vektorinių dydžių  
vidurkiai  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)  
Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia  
Literatūra

## Pointingo teorema harmoniškai kintančiam elektromagnetiniam laukui (2)

Energetinių dydžių vidurkiai:

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \text{Re } \tilde{\mathbf{\Pi}}, \quad \tilde{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}_0 \times \tilde{\mathbf{H}}_0^*, \quad (18)$$

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \left( \epsilon \tilde{\mathbf{E}}_0 \tilde{\mathbf{E}}_0^* + \mu \tilde{\mathbf{H}}_0 \tilde{\mathbf{H}}_0^* \right), \quad (19)$$

$$\langle p \rangle = \text{Re } \tilde{p}, \quad \tilde{p} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{j}}_0 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_0^*. \quad (20)$$

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui  
Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai  
Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas  
Vektorinių dydžių  
vidurkiai  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)  
Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia  
Literatūra

## Pointingo teorema harmoniškai kintančiam elektromagnetiniam laukui (2)

Energetinių dydžių vidurkiai:

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \text{Re } \tilde{\mathbf{\Pi}}, \quad \tilde{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}_0 \times \tilde{\mathbf{H}}_0^*, \quad (18)$$

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \left( \epsilon \tilde{\mathbf{E}}_0 \tilde{\mathbf{E}}_0^* + \mu \tilde{\mathbf{H}}_0 \tilde{\mathbf{H}}_0^* \right), \quad (19)$$

$$\langle p \rangle = \text{Re } \tilde{p}, \quad \tilde{p} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{j}}_0 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_0^*. \quad (20)$$

Pasinaudosime kompleksinėmis Maksvelio lygtimis:

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{H}}_0 = i\omega \tilde{\epsilon} \tilde{\mathbf{E}}_0 + \tilde{\mathbf{j}}_{P0}, \quad (21)$$

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0 = -i\omega \tilde{\mu} \tilde{\mathbf{H}}_0, \quad (22)$$

čia  $\tilde{\mathbf{j}}_{P0}$  – kompleksinė pašalinių jėgų srovės amplitudė, kai pilnutinis srovės

tankis  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_P$ ,

$\tilde{\epsilon}$  ir  $\tilde{\mu}$  yra atitinkamai dielektrinė ir magnetinė kompleksinės skvarbos:

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon' - i\epsilon'' = \epsilon - i\frac{\sigma}{\omega}, \quad \tilde{\mu} = \mu' - i\mu''. \quad (23)$$

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui  
Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai  
Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas  
Vektorinių dydžių  
vidurkiai  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)  
Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia  
Literatūra

## Pointingo teorema harmoniškai kintančiam elektromagnetiniam laukui (2)

Energetinių dydžių vidurkiai:

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \text{Re } \tilde{\mathbf{\Pi}}, \quad \tilde{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}_0 \times \tilde{\mathbf{H}}_0^*, \quad (18)$$

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \left( \epsilon \tilde{\mathbf{E}}_0 \tilde{\mathbf{E}}_0^* + \mu \tilde{\mathbf{H}}_0 \tilde{\mathbf{H}}_0^* \right), \quad (19)$$

$$\langle p \rangle = \text{Re } \tilde{p}, \quad \tilde{p} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{j}}_0 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_0^*. \quad (20)$$

Pasinaudosime kompleksinėmis Maksvelio lygtimis:

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{H}}_0 = i\omega \tilde{\epsilon} \tilde{\mathbf{E}}_0 + \tilde{\mathbf{j}}_{P0}, \quad (21)$$

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0 = -i\omega \tilde{\mu} \tilde{\mathbf{H}}_0, \quad (22)$$

čia  $\tilde{\mathbf{j}}_{P0}$  – kompleksinė pašalinių jėgų srovės amplitudė, kai pilnutinis srovės tankis  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_P$ ,

$\tilde{\epsilon}$  ir  $\tilde{\mu}$  yra atitinkamai dielektrinė ir magnetinė kompleksinės skvarbos:

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon' - i\epsilon'' = \epsilon - i\frac{\sigma}{\omega}, \quad \tilde{\mu} = \mu' - i\mu''. \quad (23)$$

Naudosime vektorinės algebros tapatybę:

$$\text{div } [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B}. \quad (24)$$

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui  
Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai  
Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas  
Vektorinių dydžių  
vidurkiai  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)  
Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia  
Literatūra

# Pointingo teorema harmoniškai kintančiam elektromagnetiniam laukui (3)

Pointingo teorema kompleksiniame pavidale:

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{\Pi}} = \frac{i\omega}{2} \left( \tilde{\epsilon}^* \tilde{\mathbf{E}}_0 \tilde{\mathbf{E}}_0^* - \tilde{\mu} \tilde{\mathbf{H}}_0 \tilde{\mathbf{H}}_0^* \right) - \tilde{p}. \quad (25)$$

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui  
Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai  
Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas  
Vektorinių dydžių  
vidurkiai  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)  
Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia  
Literatūra



# Pointingo teorema harmoniškai kintančiam elektromagnetiniam laukui (3)

Pointingo teorema kompleksiniame pavidale:

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{\Pi}} = \frac{i\omega}{2} \left( \tilde{\epsilon}^* \tilde{\mathbf{E}}_0 \tilde{\mathbf{E}}_0^* - \tilde{\mu} \tilde{\mathbf{H}}_0 \tilde{\mathbf{H}}_0^* \right) - \tilde{p}. \quad (25)$$

Atskyrus realią ir menamą dalis bei suintegravus tūriu  $V$ :

$$\operatorname{Re} \int_V \operatorname{div} \tilde{\mathbf{\Pi}} dv = \operatorname{Re} \oint_S \tilde{\mathbf{\Pi}} ds = -\frac{\omega}{2} \int_V \left( \epsilon'' \tilde{\mathbf{E}}_0 \tilde{\mathbf{E}}_0^* + \mu'' \tilde{\mathbf{H}}_0 \tilde{\mathbf{H}}_0^* \right) dv - \operatorname{Re} \int_V \tilde{p} dv,$$
$$\operatorname{Im} \int_V \operatorname{div} \tilde{\mathbf{\Pi}} dv = \operatorname{Im} \oint_S \tilde{\mathbf{\Pi}} ds = \frac{\omega}{2} \int_V \left( \epsilon' \tilde{\mathbf{E}}_0 \tilde{\mathbf{E}}_0^* - \mu' \tilde{\mathbf{H}}_0 \tilde{\mathbf{H}}_0^* \right) dv - \operatorname{Im} \int_V \tilde{p} dv.$$

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui  
Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai  
Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas  
Vektorinių dydžių  
vidurkiai  
Pointingo teorema  
harmoniskai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)  
Pointingo teorema  
harmoniskai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)  
Pointingo teorema  
harmoniskai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)  
Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia  
Literatūra

# Pointingo teorema harmoniškai kintančiam elektromagnetiniam laukui (3)

Pointingo teorema kompleksiniame pavidale:

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{\Pi}} = \frac{i\omega}{2} \left( \tilde{\epsilon}^* \tilde{\mathbf{E}}_0 \tilde{\mathbf{E}}_0^* - \tilde{\mu} \tilde{\mathbf{H}}_0 \tilde{\mathbf{H}}_0^* \right) - \tilde{p}. \quad (25)$$

Atskyrus realią ir menamą dalis bei suintegravus tūriu  $V$ :

$$\operatorname{Re} \int_V \operatorname{div} \tilde{\mathbf{\Pi}} dv = \operatorname{Re} \oint_S \tilde{\mathbf{\Pi}} ds = -\frac{\omega}{2} \int_V \left( \epsilon'' \tilde{\mathbf{E}}_0 \tilde{\mathbf{E}}_0^* + \mu'' \tilde{\mathbf{H}}_0 \tilde{\mathbf{H}}_0^* \right) dv - \operatorname{Re} \int_V \tilde{p} dv,$$

$$\operatorname{Im} \int_V \operatorname{div} \tilde{\mathbf{\Pi}} dv = \operatorname{Im} \oint_S \tilde{\mathbf{\Pi}} ds = \frac{\omega}{2} \int_V \left( \epsilon' \tilde{\mathbf{E}}_0 \tilde{\mathbf{E}}_0^* - \mu' \tilde{\mathbf{H}}_0 \tilde{\mathbf{H}}_0^* \right) dv - \operatorname{Im} \int_V \tilde{p} dv.$$

**Realios lygties dalies išvada:**

Jei nuostolių nėra,  $\epsilon'' = 0$ ,  $\mu'' = 0$ , pašalinių jėgų kuriamas energijos tankis

$\operatorname{Re} \int_V \tilde{p} dv$  sunaudojamas spinduliavimui  $\operatorname{Re} \oint_S \tilde{\mathbf{\Pi}} ds = -\operatorname{Re} \int_V \tilde{p} dv$ .

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui  
Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai  
Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas  
Vektorinių dydžių  
vidurkiai  
Pointingo teorema  
harmoniskai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)  
Pointingo teorema  
harmoniskai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)  
Pointingo teorema  
harmoniskai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)  
Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia  
Literatūra

# Pointingo teorema harmoniškai kintančiam elektromagnetiniam laukui (3)

Pointingo teorema kompleksiniame pavidale:

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{\Pi}} = \frac{i\omega}{2} \left( \tilde{\epsilon}^* \tilde{\mathbf{E}}_0 \tilde{\mathbf{E}}_0^* - \tilde{\mu} \tilde{\mathbf{H}}_0 \tilde{\mathbf{H}}_0^* \right) - \tilde{p}. \quad (25)$$

Atskyrus realią ir menamą dalis bei suintegravus tūriu  $V$ :

$$\operatorname{Re} \int_V \operatorname{div} \tilde{\mathbf{\Pi}} dv = \operatorname{Re} \oint_S \tilde{\mathbf{\Pi}} ds = -\frac{\omega}{2} \int_V \left( \epsilon'' \tilde{\mathbf{E}}_0 \tilde{\mathbf{E}}_0^* + \mu'' \tilde{\mathbf{H}}_0 \tilde{\mathbf{H}}_0^* \right) dv - \operatorname{Re} \int_V \tilde{p} dv,$$

$$\operatorname{Im} \int_V \operatorname{div} \tilde{\mathbf{\Pi}} dv = \operatorname{Im} \oint_S \tilde{\mathbf{\Pi}} ds = \frac{\omega}{2} \int_V \left( \epsilon' \tilde{\mathbf{E}}_0 \tilde{\mathbf{E}}_0^* - \mu' \tilde{\mathbf{H}}_0 \tilde{\mathbf{H}}_0^* \right) dv - \operatorname{Im} \int_V \tilde{p} dv.$$

**Realios lygties dalies išvada:**

Jei nuostolių nėra,  $\epsilon'' = 0$ ,  $\mu'' = 0$ , pašalinių jėgų kuriamas energijos tankis  $\operatorname{Re} \int_V \tilde{p} dv$  sunaudojamas spinduliavimui  $\operatorname{Re} \oint_S \tilde{\mathbf{\Pi}} ds = -\operatorname{Re} \int_V \tilde{p} dv$ .

**Menamos lygties dalies išvada:**

Uždaramame tūryje, kuriame nėra nei srovės nuostolių, nei šaltinių, vidutinės elektrinio ir magnetinio lauko energijos yra lygios, t.y., taip pat kaip ir rezonansiniame kontūre:

$$\langle w_e \rangle - \langle w_m \rangle = 0, \text{ čia } \langle w_e \rangle = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \frac{\tilde{\mathbf{E}}_0 \tilde{\mathbf{E}}_0^*}{2} dv, \langle w_m \rangle = \frac{1}{2} \int_V \mu \frac{\tilde{\mathbf{H}}_0 \tilde{\mathbf{H}}_0^*}{2} dv.$$

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui  
Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai  
Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas  
Vektorinių dydžių  
vidurkiai  
Pointingo teorema  
harmoniskai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)  
Pointingo teorema  
harmoniskai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)  
Pointingo teorema  
harmoniskai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)  
Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia  
Literatūra

## Harmoniškai kintančio lauko momentinė ir vidutinė galia

Harmoniškai kintančio elektromagnetinio lauko šiluminių nuostolių galios tankis (atliekamas darbas):

$$\begin{aligned}E(t) &= E_0 \cos \omega t, \\j(t) &= j_0 \cos(\omega t + \varphi), \\p(t) &= j(t)E(t) = j_0 E_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos \omega t \\&= \frac{1}{2} j_0 E_0 \cos \varphi + \frac{1}{2} j_0 E_0 \cos(2\omega t + \varphi).\end{aligned}$$

Vidutinė galia:

$$p_{vid} = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{2} j_0 E_0 \cos \varphi.$$

Įvedus vidutinės galios  $p_{vid}$  ir galios amplitudės  $P_0 = j_0 E_0$  žymėjimus, momentinė galia:

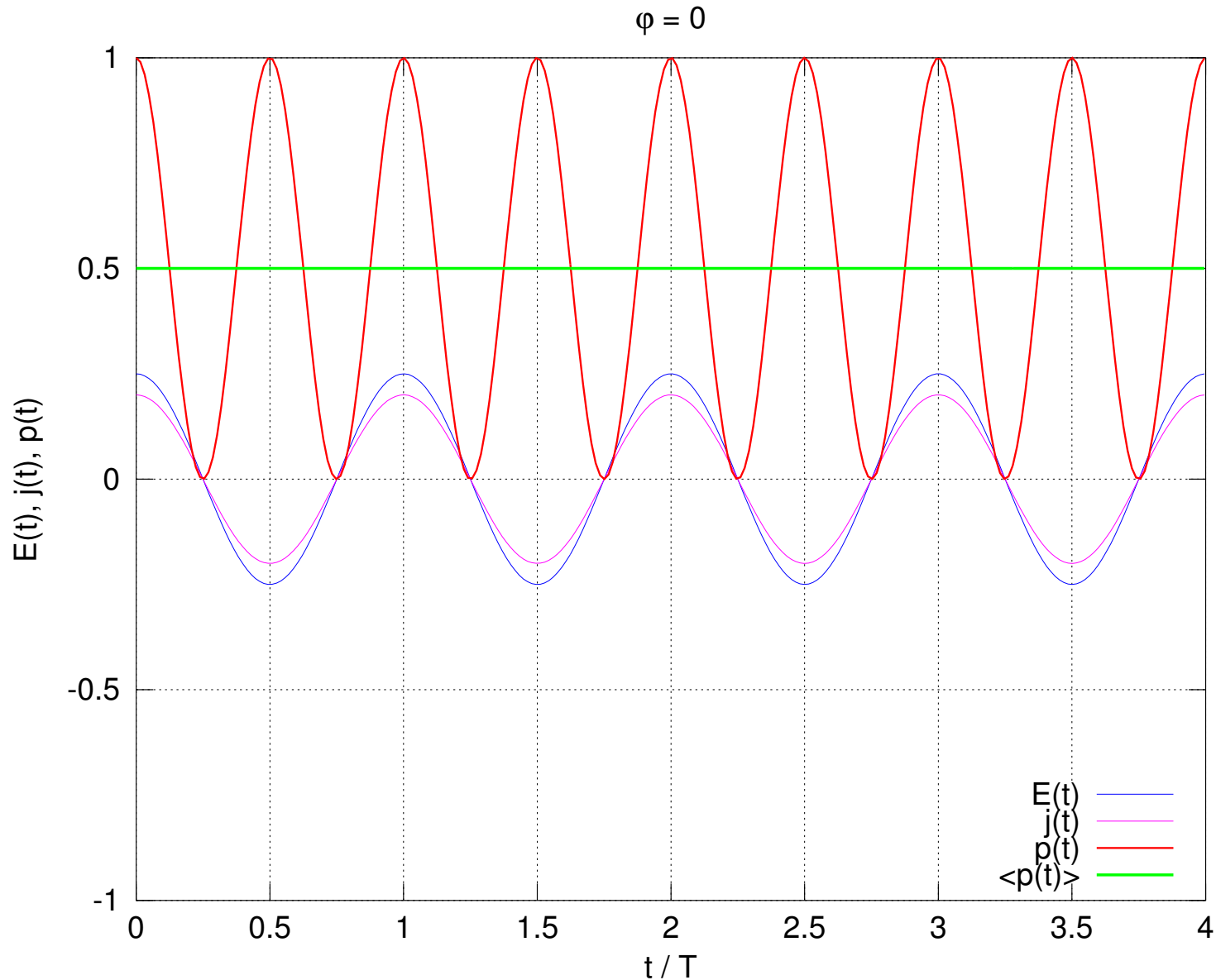
$$p(t) = p_{vid} + \frac{1}{2} P_0 \cos(2\omega t + \varphi).$$

**Išvada:** momentinė bei vidutinė galia priklauso nuo pradinio fazių skirtumo tarp elektrinio lauko ir srovės tankio.

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui  
Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai  
Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas  
Vektorinių dydžių  
vidurkiai  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)  
Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia  
Literatūra

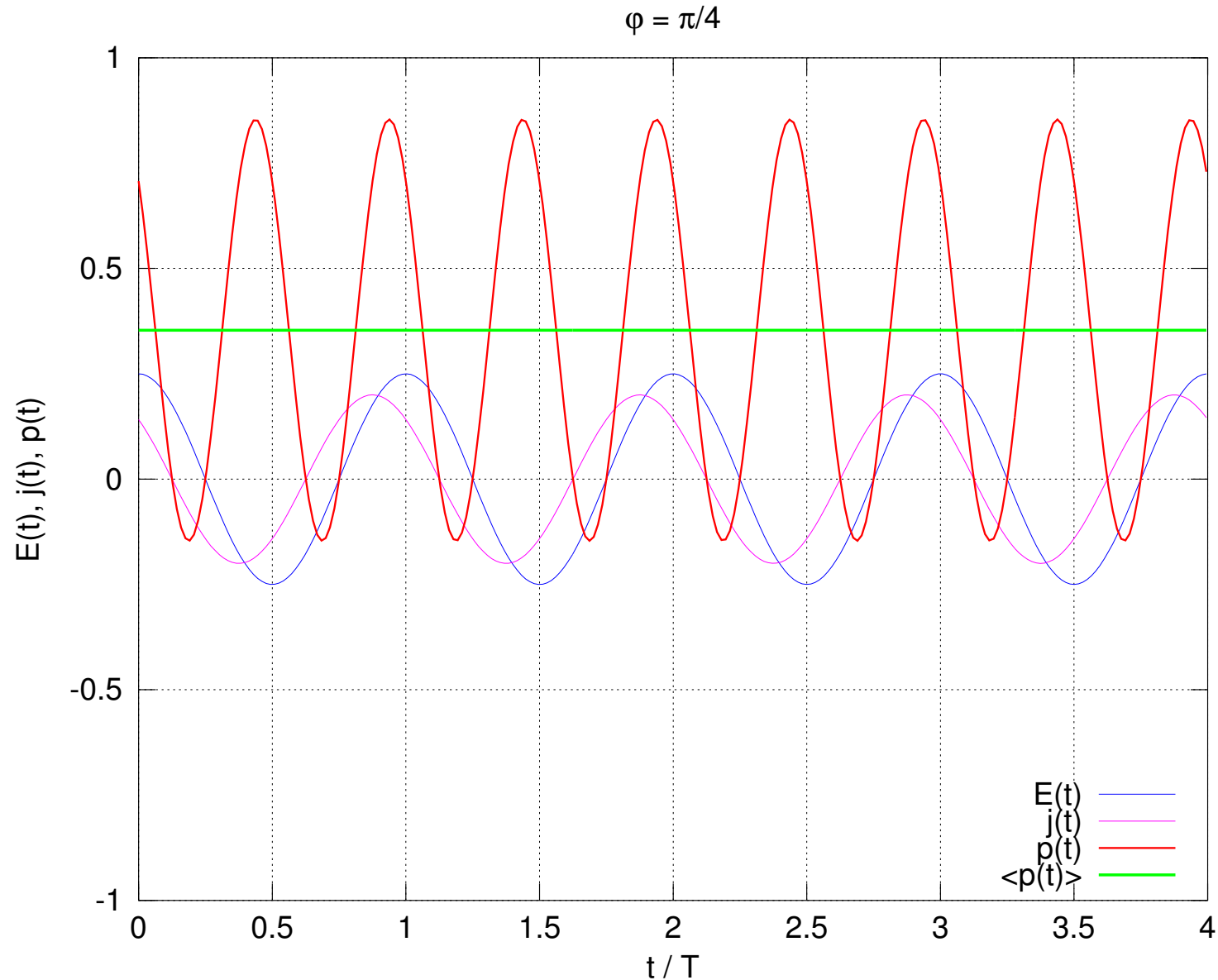
# Harmoniškai kintančio lauko momentinė ir vidutinė galia

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui  
Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai  
Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas  
Vektorinių dydžių  
vidurkiai  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)  
Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia  
Literatūra



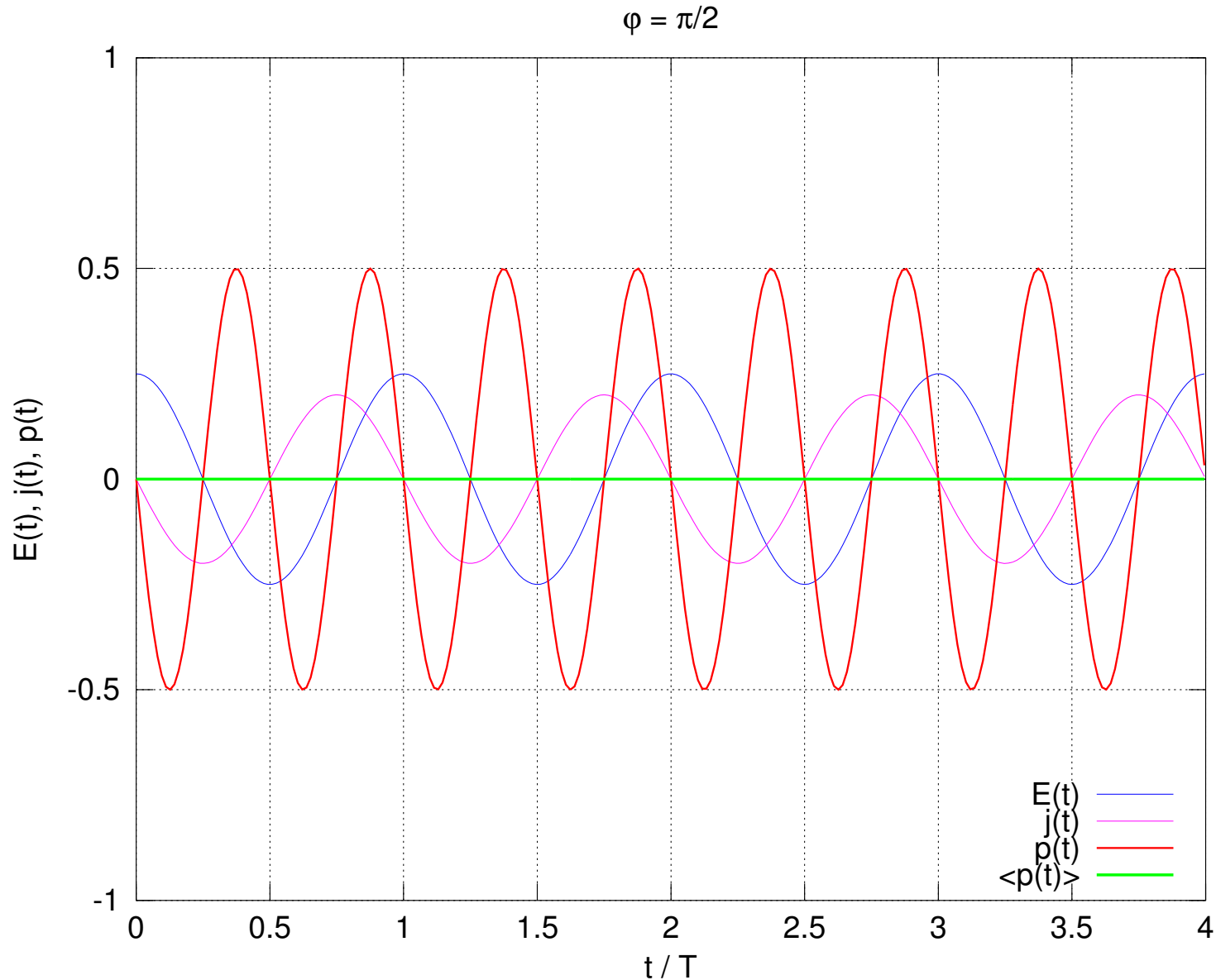
# Harmoniškai kintančio lauko momentinė ir vidutinė galia

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui  
Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai  
Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas  
Vektorinių dydžių  
vidurkiai  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)  
Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia  
Literatūra



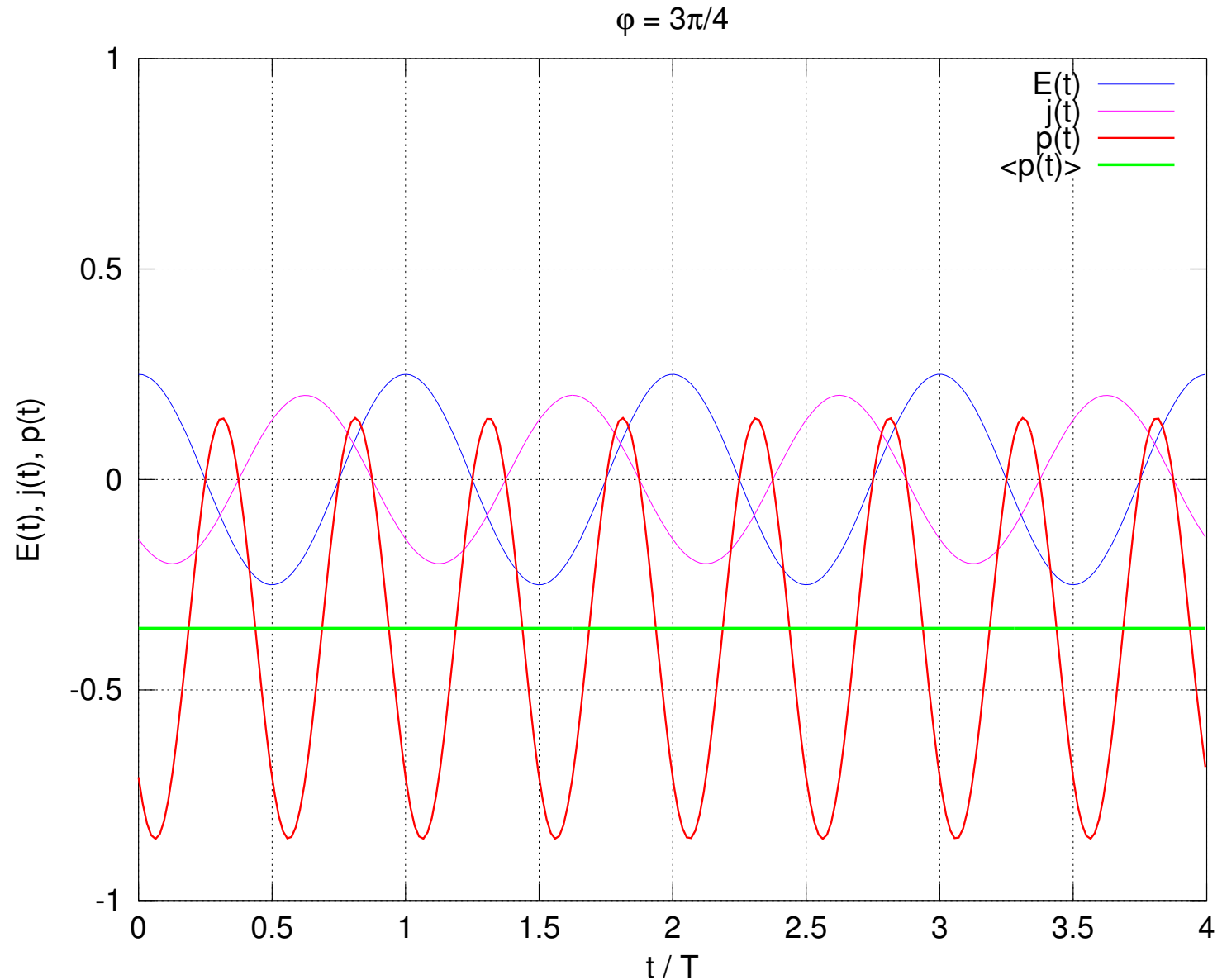
# Harmoniškai kintančio lauko momentinė ir vidutinė galia

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui  
Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai  
Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas  
Vektorinių dydžių  
vidurkiai  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)  
Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia  
Literatūra



# Harmoniškai kintančio lauko momentinė ir vidutinė galia

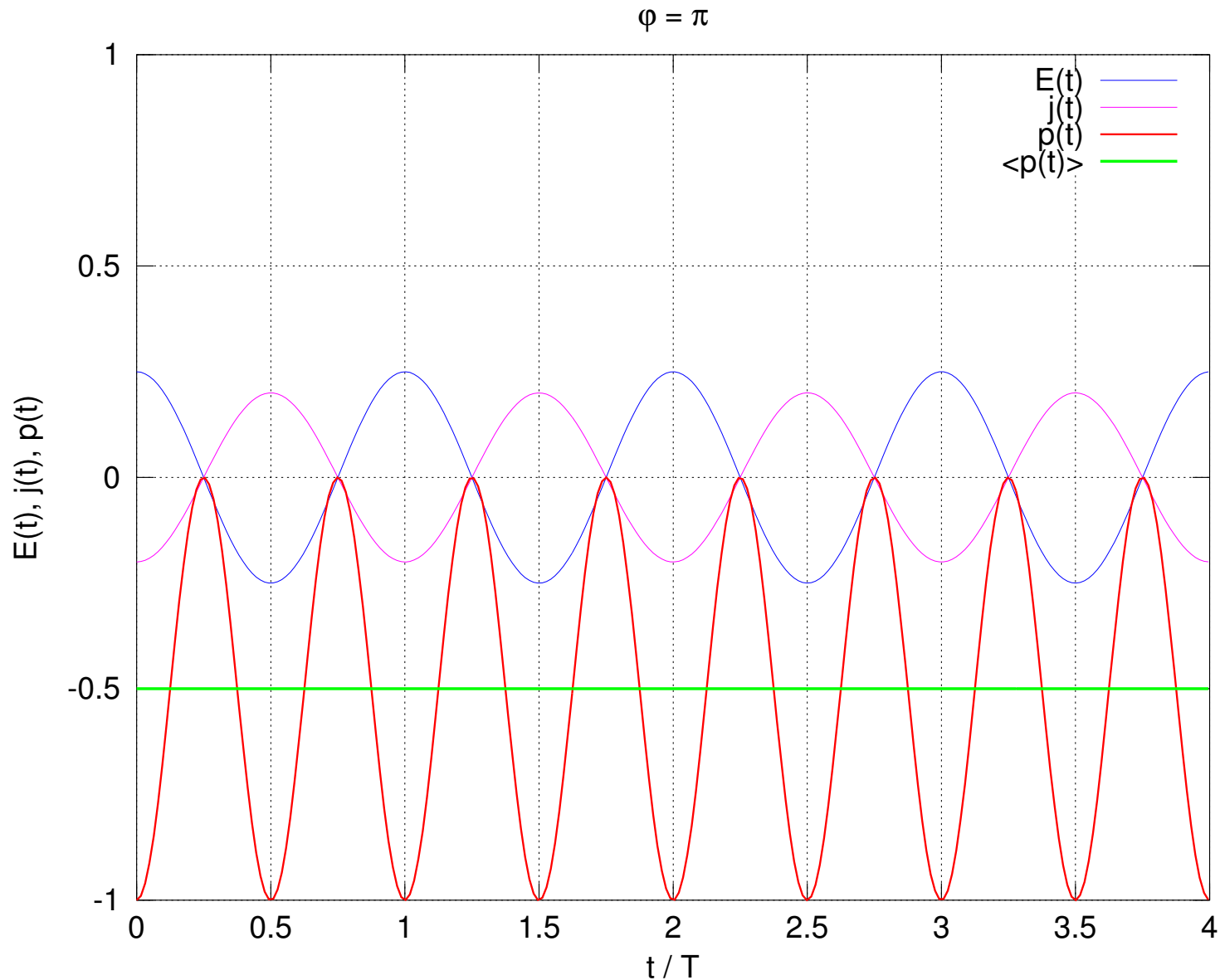
7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui  
Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai  
Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas  
Vektorinių dydžių  
vidurkiai  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elektromagnetiniam  
laukui (1)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elektromagnetiniam  
laukui (2)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elektromagnetiniam  
laukui (3)  
Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia  
Literatūra





# Harmoniškai kintančio lauko momentinė ir vidutinė galia

7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui  
Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai  
Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas  
Vektorinių dydžių  
vidurkiai  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elektromagnetiniam  
laukui (1)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elektromagnetiniam  
laukui (2)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elektromagnetiniam  
laukui (3)  
Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia  
Literatūra



## Literatūra



7. Pointingo teor.  
harm. EM laukui  
Harmoniškai  
kintančių fizikinių  
dydžių vidurkiai  
Kompleksinių  
amplitudžių  
metodas  
Vektorinių dydžių  
vidurkiai  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (1)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (2)  
Pointingo teorema  
harmoniškai  
kintančiam elekt-  
romagnetiniam  
laukui (3)  
Harmoniškai  
kintančio lauko  
momentinė ir  
vidutinė galia  
Literatūra

[Nikolskij and Nikolskaya, 1989] Nikolskij, V. and Nikolskaya, T. (1989). *Elektrodinamika i rasprostranenie radiovoln.* Moskva: Nauka.

[Stratton, 1941] Stratton, J. (1941). *Electromagnetic theory.* McGraw-Hill.

8. EM lauko  
vektorių lygtys

Elektromagnetinio  
lauko lygtys

Antros eilės  
diferencialinės  
elektromagnetinio  
lauko lygtys

Bangos lygtys

Bendra bangos  
lygtis

Harmoninio  
elektromagnetinio  
lauko vektorių  
lygtys

Bangos ir  
difuzijos lygtys

Literatūra

## 8. Elektromagnetinio lauko vektorių lygtys

## Elektromagnetinio lauko lygtys

Elektromagnetinį lauką pilnai aprašo Maksvelio lygtys

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}$$

medžiagos lygtys

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_p,$$

ir kraštinės sąlygos nagrinėjama tūrį ribojančiame paviršiuje.

- Jei pašalinių srovių ir krūvių nėra,  $\mathbf{j}_p = 0$  ir  $\rho = 0$ , Maksvelio lygčių sprendiniai aprašo *laisvąjį* elektromagnetinį lauką.
- Veikiant pašalinėms jėgoms,  $\mathbf{j}_p \neq 0$  ir  $\rho \neq 0$ , vyksta elektromagnetinio lauko *žadinimas*. Toks laukas vadinamas priverstiniu arba *spinduliavimu*.
- Pašalinių jėgų srovės tankis  $\mathbf{j}_p$  – tai žinomo pasiskirstymo srovės tankis, palaikomas išorinio šaltinio-generatoriaus. Sukuriamas spinduliavimo laukas šiai srovei grįžtamos įtakos neturi.

8. EM lauko vektorių lygtys  
Elektromagnetinio lauko lygtys  
Antros eilės diferencialinės elektromagnetinio lauko lygtys  
Bangos lygtys  
Bendra bangos lygtis  
Harmoninio elektromagnetinio lauko vektorių lygtys  
Bangos ir difuzijos lygtys  
Literatūra

## Antros eilės diferencialinės elektromagnetinio lauko lygtys

Klausimas – ar galima išvesti atskiras lygtis  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{H}$  lauko vektoriams?

Tokios lygtys egzistuoja – tai antros eilės diferencialinės vektorinės lygtys.

8. EM lauko  
vektorių lygtys  
Elektromagnetinio  
lauko lygtys  
Antros eilės  
diferencialinės  
elektromagnetinio  
lauko lygtys  
Bangos lygtys  
Bendra bangos  
lygtis  
Harmoninio  
elektromagnetinio  
lauko vektorių  
lygtys  
Bangos ir  
difuzijos lygtys  
Literatūra

## Antros eilės diferencialinės elektromagnetinio lauko lygtys

Klausimas – ar galima išvesti atskiras lygtis  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{H}$  lauko vektoriams?

Tokios lygtys egzistuoja – tai antros eilės diferencialinės vektorinės lygtys.

Pritaikysime rot operaciją pirmajai Maksvelio lygčiai ir pasinaudosime vektorinės analizės tapatybe

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}, \quad (1)$$

čia  $\Delta$  yra Laplaso operatorius, kuris Dekarto koordinačių sistemoje išreiškiamas

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2)$$

8. EM lauko  
vektorių lygtys  
Elektromagnetinio  
lauko lygtys  
Antros eilės  
diferencialinės  
elektromagnetinio  
lauko lygtys  
Bangos lygtys  
Bendra bangos  
lygtis  
Harmoninio  
elektromagnetinio  
lauko vektorių  
lygtys  
Bangos ir  
difuzijos lygtys  
Literatūra

## Antros eilės diferencialinės elektromagnetinio lauko lygtys

Klausimas – ar galima išvesti atskiras lygtis  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{H}$  lauko vektoriams?

Tokios lygtys egzistuoja – tai antros eilės diferencialinės vektorinės lygtys.

Pritaikysime rot operaciją pirmajai Maksvelio lygčiai ir pasinaudosime vektorinės analizės tapatybe

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}, \quad (1)$$

čia  $\Delta$  yra Laplaso operatorius, kuris Dekarto koordinačių sistemoje išreiškiamas

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2)$$

Atlikę veiksmus gauname vektorinę d'Alamberto lygtį magnetiniam laukui:

$$\Delta \mathbf{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = - \operatorname{rot} \mathbf{j}. \quad (3)$$

Kai  $\sigma = 0$ , pašalinių jėgų srovės tankis  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_p$  yra magnetinio lauko šaltinis.

8. EM lauko vektorių lygtys  
Elektromagnetinio lauko lygtys  
Antros eilės diferencialinės elektromagnetinio lauko lygtys  
Bangos lygtys  
Bendra bangos lygtis  
Harmoninio elektromagnetinio lauko vektorių lygtys  
Bangos ir difuzijos lygtys  
Literatūra

## Bangos lygtys

Pakartoję panašų išvedimą, gausime d'Alambero lygtį elektriniam laukui:

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \text{grad } \rho + \mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (4)$$

8. EM lauko  
vektorių lygtys  
Elektromagnetinio  
lauko lygtys  
Antros eilės  
diferencialinės  
elektromagnetinio  
lauko lygtys  
Bangos lygtys  
Bendra bangos  
lygtis  
Harmoninio  
elektromagnetinio  
lauko vektorių  
lygtys  
Bangos ir  
difuzijos lygtys  
Literatūra



## Bangos lygtys

Pakartoję panašų išvedimą, gausime d'Alamberto lygtį elektriniam laukui:

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \text{grad } \rho + \mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (4)$$

Jei laidumas  $\sigma = 0$  ir pašalinių jėgų srovių tankis  $\mathbf{j}_p = 0$ , pvz., laisvoje erdvėje, tai  $\mathbf{j} = 0$ ,  $\rho = 0$ , gauname *homogeninių* lygčių sistemą

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

← Tai bangos lygtys

$$\Delta \mathbf{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (6)$$

Bangos lygtys aprašo elektromagnetinio lauko virpesių sklidimą erdvėje.

8. EM lauko vektorių lygtys  
Elektromagnetinio lauko lygtys  
Antros eilės diferencialinės elektromagnetinio lauko lygtys  
Bangos lygtys  
Bendra bangos lygtis  
Harmoninio elektromagnetinio lauko vektorių lygtys  
Bangos ir difuzijos lygtys  
Literatūra

## Bendra bangos lygtis

Bendra bangos lygtis

$$\Delta u - \frac{1}{v} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (7)$$

aprašo faziniu greičiu  $v$  sklindančias bangas:

$$u = u(x, t) = f(t - x/v) + g(t + x/v). \quad (8)$$

Elektromagnetinės bangos atveju greitis

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n}. \quad (9)$$

Jei laukai pastovūs laiko atžvilgiu, d'Alamberto bei bangos lygtys virsta atitinkamai **Puasono** ir **Laplaso** lygtimis elektrostatiniam potencialui  $\varphi$ :

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad \Delta\varphi = 0. \quad (10)$$

8. EM lauko vektorių lygtys  
Elektromagnetinio lauko lygtys  
Antros eilės diferencialinės elektromagnetinio lauko lygtys  
Bangos lygtys  
Bendra bangos lygtis  
Harmoninio elektromagnetinio lauko vektorių lygtys  
Bangos ir difuzijos lygtys  
Literatūra

## Harmoninio elektromagnetinio lauko vektorių lygtys

Kai elektromagnetinis laukas kinta harmoniškai

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i\omega t}, \quad \mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}}_0 e^{i\omega t}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_p, \quad \mathbf{j}_p = \tilde{\mathbf{j}}_{p0} e^{i\omega t},$$

naudodami kompleksinių amplitudžių metodą bei pakeitimus:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2,$$
$$\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}_p, \quad \epsilon \rightarrow \tilde{\epsilon} = \epsilon' - i\epsilon'',$$

8. EM lauko  
vektorių lygtys  
Elektromagnetinio  
lauko lygtys  
Antros eilės  
diferencialinės  
elektromagnetinio  
lauko lygtys  
Bangos lygtys  
Bendra bangos  
lygtis  
Harmoninio  
elektromagnetinio  
lauko vektorių  
lygtys  
Bangos ir  
difuzijos lygtys  
Literatūra

## Harmoninio elektromagnetinio lauko vektorių lygtys

Kai elektromagnetinis laukas kinta harmoniškai

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i\omega t}, \quad \mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}}_0 e^{i\omega t}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_p, \quad \mathbf{j}_p = \tilde{\mathbf{j}}_{p0} e^{i\omega t},$$

naudodami kompleksinių amplitudžių metodą bei pakeitimus:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2,$$
$$\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}_p, \quad \epsilon \rightarrow \tilde{\epsilon} = \epsilon' - i\epsilon'',$$

gauname vektorines Helmholco lygtis:

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}}_0 + \omega^2 \tilde{\epsilon} \mu \tilde{\mathbf{E}}_0 = \frac{i}{\omega \tilde{\epsilon}} \text{grad div } \tilde{\mathbf{j}}_{p0} + i\omega \mu \tilde{\mathbf{j}}_{p0},$$
$$\Delta \tilde{\mathbf{H}}_0 + \omega^2 \tilde{\epsilon} \mu \tilde{\mathbf{H}}_0 = -\text{rot } \tilde{\mathbf{j}}_{p0}.$$

Homogeninės Helmholco lygtys aprašo *laisvąjį* elektromagnetinį lauką:

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}}_0 + \omega^2 \tilde{\epsilon} \mu \tilde{\mathbf{E}}_0 = 0, \tag{11}$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{H}}_0 + \omega^2 \tilde{\epsilon} \mu \tilde{\mathbf{H}}_0 = 0. \tag{12}$$

8. EM lauko vektorių lygtys  
Elektromagnetinio lauko lygtys  
Antros eilės diferencialinės elektromagnetinio lauko lygtys  
Bangos lygtys  
Bendra bangos lygtis  
Harmoninio elektromagnetinio lauko vektorių lygtys  
Bangos ir difuzijos lygtys  
Literatūra

## Bangos ir difuzijos lygtys

Panagrinėsime elektrinio lauko Helmholco lygtį esant kompleksinei skvarbai

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon - i \frac{\sigma}{\omega}. \quad (13)$$

Helmholco lygtis laisvajam harmoniniam laukui:

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}}_0 + \omega^2 \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right) \epsilon \mu \tilde{\mathbf{E}}_0 = 0. \quad (14)$$

Įvedus dydį  $\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$  – relaksacijos laiką medžiagoje [Thide, 2000],

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}}_0 + \omega^2 \left(1 - i \frac{1}{\omega \tau}\right) \epsilon \mu \tilde{\mathbf{E}}_0 = 0. \quad (15)$$

8. EM lauko  
vektorių lygtys  
Elektromagnetinio  
lauko lygtys  
Antros eilės  
diferencialinės  
elektromagnetinio  
lauko lygtys  
Bangos lygtys  
Bendra bangos  
lygtis  
Harmoninio  
elektromagnetinio  
lauko vektorių  
lygtys  
Bangos ir  
difuzijos lygtys  
Literatūra

## Bangos ir difuzijos lygtys

Panagrinėsime elektrinio lauko Helmholco lygtį esant kompleksinei skvarbai

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon - i\frac{\sigma}{\omega}. \quad (13)$$

Helmholco lygtis laisvajam harmoniniam laukui:

$$\Delta\tilde{\mathbf{E}}_0 + \omega^2 \left(1 - i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right) \epsilon\mu\tilde{\mathbf{E}}_0 = 0. \quad (14)$$

Įvedus dydį  $\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$  – relaksacijos laiką medžiagoje [Thide, 2000],

$$\Delta\tilde{\mathbf{E}}_0 + \omega^2 \left(1 - i\frac{1}{\omega\tau}\right) \epsilon\mu\tilde{\mathbf{E}}_0 = 0. \quad (15)$$

Ribiniai Helmholco lygties atvejai:

- Kai  $\omega\tau \gg 1$ , Helmholco lygtis virsta *bangos* lygtimi

$$\Delta\tilde{\mathbf{E}}_0 + \omega^2 \epsilon\mu\tilde{\mathbf{E}}_0 = 0. \quad (16)$$

- Kai  $\omega\tau \ll 1$ , gauname difuzijos lygtį [Silveira and Lima, 2009]

$$\Delta\tilde{\mathbf{E}}_0 - i\omega\sigma\mu\tilde{\mathbf{E}}_0 = 0. \quad (17)$$

## Literatūra



8. EM lauko  
vektorių lygtys  
Elektromagnetinio  
lauko lygtys  
Antros eilės  
diferencialinės  
elektromagnetinio  
lauko lygtys  
Bangos lygtys  
Bendra bangos  
lygtis  
Harmoninio  
elektromagnetinio  
lauko vektorių  
lygtys  
Bangos ir  
difuzijos lygtys

Literatūra

[Silveira and Lima, 2009] Silveira, F. E. M. and Lima, J. A. S. (2009). Attenuation and damping of electromagnetic fields: influence of inertia and displacement current.  
<http://arxiv.org/abs/0903.0210v1>.

[Thide, 2000] Thide, B. (2000). *Electromagnetic Field Theory*. Dover Pubns.

## 9. Apibendrintos plokščiosios EM bangos

Apie bangas (1)

Apie bangas (2)

Vienmatės bangos lygties sprendiniai

3D bangos lygties sprendiniai (1)

3D bangos lygties sprendiniai (2)

Skersinės EM bangos

Vektoriniai EM bangos lygties sprendiniai

Banginė varža

Pointingo vektorius

EM lauko energijos tankis

Literatūra

## 9. Apibendrintos plokščiosios elektromagnetinės bangos

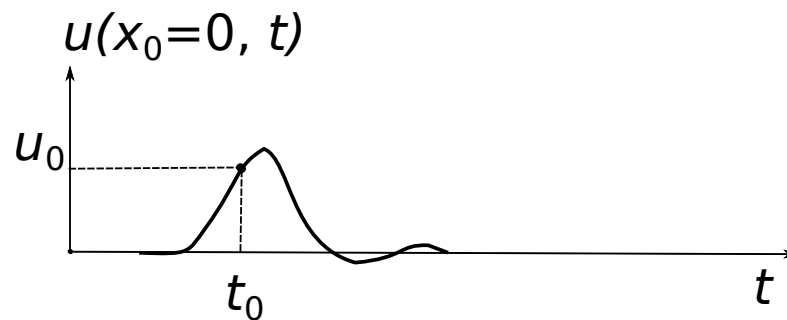


## Bendros žinios apie bangas (1)

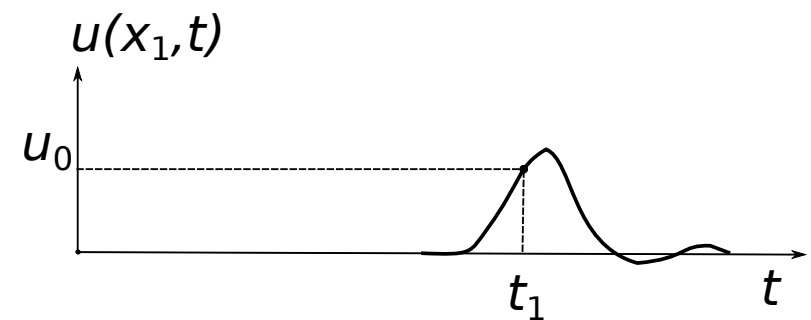
Banginius procesus aprašanti funkcija  $u(x, t)$ :

$$u(0, t) = \varphi(t),$$

$$u(x_1, t) = \varphi\left(t - \frac{x_1}{v}\right).$$



(a)



(b)

1 pav.: Bangos funkcijos laikinis kitimas skirtinguose erdvės taškuose.

9. Apibendrintos plokščiosios EM bangos

Apie bangas (1)

Apie bangas (2)

Vienmatės bangos lygties sprendiniai

3D bangos lygties sprendiniai (1)

3D bangos lygties sprendiniai (2)

Skersinės EM bangos

Vektoriniai EM bangos lygties sprendiniai

Banginė varža

Pointingo

vektorius

EM lauko

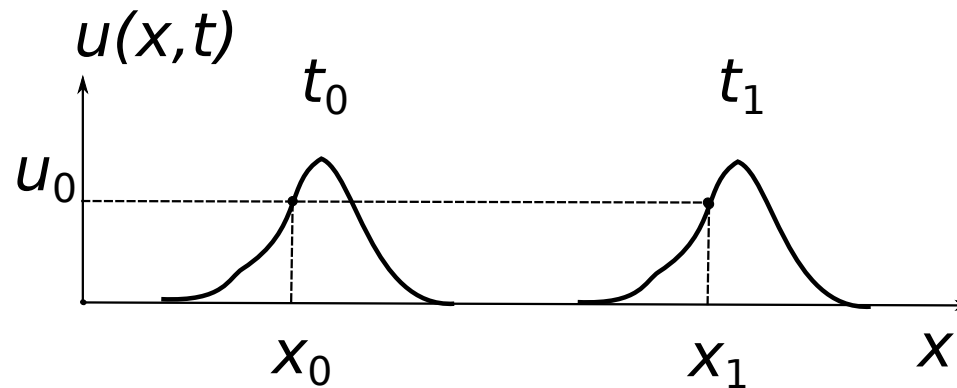
energijos tankis

Literatūra

## Bendros žinios apie bangas (2)

Bangos sklidimą aprašantys parametrai:

- **Fazė** – tai momentinę bangos funkcijos reikšmę (pvz.,  $u_0$ ) atitinkantis laiko bei erdvės taškas.
- **Bangos frontas** – tai vienodos fazės paviršius.
- **Fazinis greitis** – tai bangos fronto judėjimo greitis.



2 pav.: Bangos funkcijos erdvinis kitimas skirtingais laiko momentais.

$$t_1 = t_0 + \frac{x_1 - x_0}{v},$$

čia  $v$  – bangos fazinis greitis.

9. Apibendrintos plokščiosios EM bangos

Apie bangas (1)

Apie bangas (2)

Vienmatės bangos lygties sprendiniai

3D bangos lygties sprendiniai (1)

3D bangos lygties sprendiniai (2)

Skersinės EM bangos

Vektoriniai EM bangos lygties sprendiniai

Banginė varža

Pointingo vektorius

EM lauko energijos tankis

Literatūra

## Vienmatės bangos lygties sprendiniai

Nagrinsime homogeninę bangos lygtį:

$$\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

čia Laplaso operatorius vienmačiu atveju yra lygus

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (2)$$

ir ieškosime sprendinio tokiu pavidalu:

$$u = u(x, t) = \varphi_1 (vt - x) + \varphi_2 (vt + x). \quad (3)$$

9. Apibendrintos plokščiosios EM bangos

Apie bangas (1)

Apie bangas (2)

Vienmatės bangos lygties sprendiniai

3D bangos lygties sprendiniai (1)

3D bangos lygties sprendiniai (2)

Skersinės EM bangos

Vektoriniai EM bangos lygties sprendiniai

Banginė varža

Pointingo

vektorius

EM lauko

energijos tankis

Literatūra

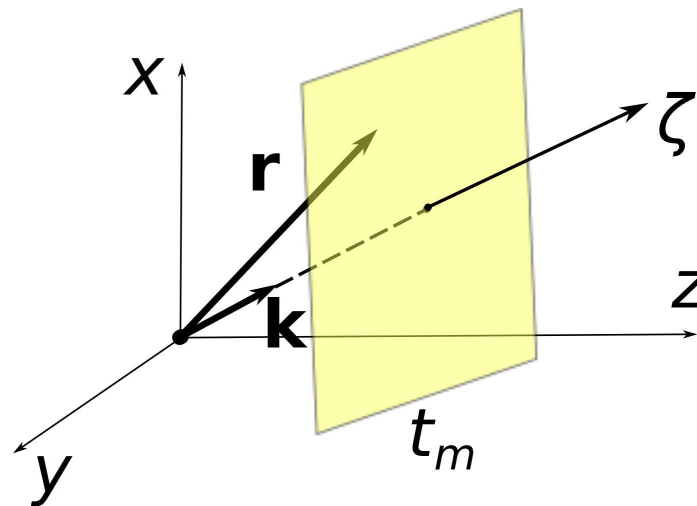
## Bangos lygties sprendiniai trimačiu atveju (1)

Trimačiu atveju geometrija aprašoma vektoriais:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_0x + \mathbf{y}_0y + \mathbf{z}_0z,$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{x}_0k_x + \mathbf{y}_0k_y + \mathbf{z}_0k_z,$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = xk_x + yk_y + zk_z = \text{const.}$$



3 pav.: Plokščiosios bangos geometrija trimatėje erdvėje.

Nagrinsime trimatės bangos lygties sprendinį  $\varphi(kvt \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ , kuris yra vienodas visuose  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  plokštumos taškuose laiko  $t_m$  momentais – tokios bangos vadinamos *plokščiosiomis*.

9. Apibendrintos plokščiosios EM bangos

Apie bangas (1)

Apie bangas (2)

Vienmatės bangos lygties sprendiniai

3D bangos lygties sprendiniai (1)

3D bangos lygties sprendiniai (2)

Skersinės EM bangos

Vektoriniai EM bangos lygties sprendiniai

Banginė varža

Pointingo vektorius

EM lauko energijos tankis

Literatūra

## Bangos lygties sprendiniai trimačiu atveju (2)

Jei reikalausim, kad  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  nesikeistų atliekant koordinačių transformacijas, tai  $\mathbf{k}$  vektorius bus *kovektorius* (kovariantinis vektorius).

Patikrinsime ar sprendinys tenkina trimatę bangos lygtį

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0,$$

čia Laplaso operatorius Dekarto koordinačių sistemoje

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

pasinaudodami vektorinės analizės tapatybėmis:

$$\begin{aligned}\Delta f &= \operatorname{div} \operatorname{grad} f, \\ \operatorname{div} (f \mathbf{A}) &= f \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} f.\end{aligned}$$

9. Apibendrintos plokščiosios EM bangos

Apie bangas (1)

Apie bangas (2)

Vienmatės bangos lygties sprendiniai

3D bangos lygties sprendiniai (1)

3D bangos lygties sprendiniai (2)

Skersinės EM bangos

Vektoriniai EM bangos lygties sprendiniai

Banginė varža

Pointingo vektorius

EM lauko energijos tankis

Literatūra

# Skersinės elektromagnetinės bangos

Surasime kaip išsidėsto  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{H}$  vektoriai bangos fronto plokštumoje.  
Iš II ir IV Maksvelio lygčių suskaičiuojame pilną  $\mathbf{H}$  diferencialą  $\mathbf{k}$  kryptimi:

9. Apibendrintos plokščiosios EM bangos

Apie bangas (1)

Apie bangas (2)

Vienmatės bangos lygties sprendiniai

3D bangos lygties sprendiniai (1)

3D bangos lygties sprendiniai (2)

Skersinės EM bangos

Vektoriniai EM bangos lygties sprendiniai

Banginė varža

Pointingo

vektorius

EM lauko

energijos tankis

Literatūra

## Skersinės elektromagnetinės bangos

Surasime kaip išsidėsto  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{H}$  vektoriai bangos fronto plokštumoje.  
Iš II ir IV Maksvelio lygčių suskaičiuojame pilną  $\mathbf{H}$  diferencialą  $\mathbf{k}$  kryptimi:

$$\mathbf{k} \cdot d\mathbf{H} = \mathbf{k} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \zeta} d\zeta \right) = 0.$$

9. Apibendrintos plokščiosios EM bangos

Apie bangas (1)

Apie bangas (2)

Vienmatės bangos lygties sprendiniai

3D bangos lygties sprendiniai (1)

3D bangos lygties sprendiniai (2)

Skersinės EM bangos

Vektoriniai EM bangos lygties sprendiniai

Banginė varža

Pointingo

vektorius

EM lauko

energijos tankis

Literatūra

## Skersinės elektromagnetinės bangos

Surasime kaip išsidėsto  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{H}$  vektoriai bangos fronto plokštumoje.

Iš II ir IV Maksvelio lygčių suskaičiuojame pilną  $\mathbf{H}$  diferencialą  $\mathbf{k}$  kryptimi:

$$\mathbf{k} \cdot d\mathbf{H} = \mathbf{k} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \zeta} d\zeta \right) = 0.$$

Elektriniam laukui iš I ir III Maksvelio lygčių gauname

$$\mathbf{k} \cdot \left( \frac{d\mathbf{H}}{dt} + \frac{\sigma}{\epsilon} \mathbf{E} \right) = 0,$$

iš čia elektrinio lauko išilginė dedamoji

$$E_k = E_{k0} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

t.y. esant baigtiniam laidumui  $\sigma$ ,  $E_k$  silpnėja eksponentiškai su relaksacijos laiku  $\tau = \epsilon/\sigma$ .

Vadinasi, elektromagnetinės bangos yra *skersinės*:  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{H}$  vektoriai yra statmeni sklidimo kryptčiai.

9. Apibendrintos plokščiosios EM bangos

Apie bangas (1)

Apie bangas (2)

Vienmatės bangos lygties sprendiniai

3D bangos lygties sprendiniai (1)

3D bangos lygties sprendiniai (2)

Skersinės EM bangos

Vektoriniai EM bangos lygties sprendiniai

Banginė varža

Pointingo

vektorius

EM lauko

energijos tankis

Literatūra



## Vektoriniai elektromagnetinės bangos lygties sprendiniai

Sprendinio ieškosime tokiu pavidalu:

$$\mathbf{E} = k[\mathbf{k} \times \mathbf{A}]\varphi(\beta),$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q}\varphi(\beta),$$

čia  $\mathbf{A}$  ir  $\mathbf{Q}$  yra vektoriai-konstantos, o funkcijos argumentas

$$\beta = kvt \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \frac{k}{\sqrt{\epsilon\mu}}t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}.$$

Įstatę į Maksvelio lygtis ir atlikę veiksmus, gauname

$$\mathbf{Q} = \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{A}], \quad (4)$$

ir elektromagnetinio lauko vektoriai aprašantys plokščiasias skersines bangas

$$\mathbf{E} = k[\mathbf{k} \times \mathbf{A}]\varphi\left(\frac{k}{\sqrt{\epsilon\mu}}t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\right), \quad (5)$$

$$\mathbf{H} = \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{A}]\varphi\left(\frac{k}{\sqrt{\epsilon\mu}}t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\right), \quad (6)$$

čia vektorius  $\mathbf{A}$  gali būti orientuotas bet kaip, išskyrus lygiagrečiai  $\mathbf{k}$  kryptčiai.

9. Apibendrintos plokščiosios EM bangos

Apie bangas (1)

Apie bangas (2)

Vienmatės bangos lygties sprendiniai

3D bangos lygties sprendiniai (1)

3D bangos lygties sprendiniai (2)

Skersinės EM bangos

Vektoriniai EM bangos lygties sprendiniai

Banginė varža

Pointingo

vektorius

EM lauko

energijos tankis

Literatūra

## Banginė varža

**E** ir **H** modulių santykis

$$Z = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (7)$$

vadinamas *bangine varža*, jos dimensija - omas  $[\Omega]$ .

Sutelktųjų parametrų grandinėse  $E \sim$  potencialų skirtumui, o  $H \sim$  srovei.

Laisvos erdvės (vakuumo) banginė varža:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\frac{1}{36\pi} 10^{-9}}} = 120\pi [\Omega]. \quad (8)$$

**E** ir **H** vektoriai susieti tokiais sąryšiais:

$$\mathbf{H} = \pm \frac{1}{Z} [\mathbf{k}_0 \times \mathbf{E}], \quad (9)$$

$$\mathbf{E} = \mp Z [\mathbf{k}_0 \times \mathbf{H}]. \quad (10)$$

9. Apibendrintos plokščiosios EM bangos

Apie bangas (1)

Apie bangas (2)

Vienmatės bangos lygties sprendiniai

3D bangos lygties sprendiniai (1)

3D bangos lygties sprendiniai (2)

Skersinės EM bangos

Vektoriniai EM bangos lygties sprendiniai

Banginė varža

Pointingo vektorius

EM lauko energijos tankis

Literatūra

# Plokščiosios elektromagnetinės bangos Pointingo vektorius

Surasime kuria kryptimi pernešama elektromagnetinio lauko energija.

Pointingo vektorius:

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \pm k \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [\mathbf{k} \times \mathbf{A}] \times [\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{A}]] \varphi^2 \left( \frac{k}{\sqrt{\epsilon\mu}} t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \right).$$

9. Apibendrintos plokščiosios EM bangos

Apie bangas (1)

Apie bangas (2)

Vienmatės bangos lygties sprendiniai

3D bangos lygties sprendiniai (1)

3D bangos lygties sprendiniai (2)

Skersinės EM bangos

Vektoriniai EM bangos lygties sprendiniai

Banginė varža

Pointingo vektorius

EM lauko energijos tankis

Literatūra

# Plokščiosios elektromagnetinės bangos Pointingo vektorius

Surasime kuria kryptimi pernešama elektromagnetinio lauko energija.

Pointingo vektorius:

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \pm k \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [\mathbf{k} \times \mathbf{A}] \times [\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{A}]] \varphi^2 \left( \frac{k}{\sqrt{\epsilon\mu}} t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \right).$$

Pasinaudoję vektorinės algebros tapatybėmis

$$\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad (11)$$

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]^2 = \mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2, \quad (12)$$

9. Apibendrintos plokščiosios EM bangos

Apie bangas (1)

Apie bangas (2)

Vienmatės bangos lygties sprendiniai

3D bangos lygties sprendiniai (1)

3D bangos lygties sprendiniai (2)

Skersinės EM bangos

Vektoriniai EM bangos lygties sprendiniai

Banginė varža

Pointingo vektorius

EM lauko energijos tankis

Literatūra

## Plokščiosios elektromagnetinės bangos Pointingo vektorius

Surasime kuria kryptimi pernešama elektromagnetinio lauko energija.

Pointingo vektorius:

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \pm k \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [\mathbf{k} \times \mathbf{A}] \times [\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{A}]] \varphi^2 \left( \frac{k}{\sqrt{\epsilon\mu}} t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \right).$$

Pasinaudoję vektorinės algebros tapatybėmis

$$\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad (11)$$

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]^2 = \mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2, \quad (12)$$

ir supaprastinę Pointingo vektoriaus išraišką, gauname

$$\mathbf{\Pi} = \pm k \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{k} [\mathbf{k} \times \mathbf{A}]^2 \varphi^2 \left( \frac{k}{\sqrt{\epsilon\mu}} t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \right) = \pm \mathbf{k}_0 \Pi, \quad (13)$$

t.y. Pointingo vektorius  $\mathbf{\Pi}$  yra nukreiptas  $\mathbf{k}$  kryptimi, vadinasi energija pernešama  $\mathbf{k}$  kryptimi, o  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{H}$  vektorių kitimas vyksta statmenai  $\mathbf{k}$  krypčiai.

9. Apibendrintos plokščiosios EM bangos

Apie bangas (1)

Apie bangas (2)

Vienmatės bangos lygties sprendiniai

3D bangos lygties sprendiniai (1)

3D bangos lygties sprendiniai (2)

Skersinės EM bangos

Vektoriniai EM bangos lygties sprendiniai

Banginė varža

Pointingo vektorius

EM lauko energijos tankis

Literatūra

# Elektromagnetinės bangos elektrinio ir magnetinio laukų energijos tankiai

Suskaičiuosime elektrinio ir magnetinio laukų energijos tankius:

$$w_e = \epsilon \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}}{2} = \frac{1}{2} \epsilon k^2 [\mathbf{k} \times \mathbf{A}]^2 \varphi^2(\mathbf{r}, t), \quad (14)$$

$$w_m = \mu \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}}{2} = \frac{1}{2} \epsilon k^2 [\mathbf{k} \times \mathbf{A}]^2 \varphi^2(\mathbf{r}, t), \quad (15)$$

vadinasi, plokščiajai elektromagnetinei bangai

$$w_e = w_m,$$

t.y. panašiai kaip ir rezonansiniame kontūre, tik čia bendru atveju  $\varphi^2(\mathbf{r}, t)$  – nebūtinai harmoninė laiko funkcija.

9. Apibendrintos plokščiosios EM bangos

Apie bangas (1)

Apie bangas (2)

Vienmatės bangos lygties sprendiniai

3D bangos lygties sprendiniai (1)

3D bangos lygties sprendiniai (2)

Skersinės EM bangos

Vektoriniai EM bangos lygties sprendiniai

Banginė varža

Pointingo vektorius

EM lauko energijos tankis

Literatūra

## Literatūra



### 9. Apibendrintos plokščiosios EM bangos

Apie bangas (1)

Apie bangas (2)

Vienmatės bangos lygties sprendiniai

3D bangos lygties sprendiniai (1)

3D bangos lygties sprendiniai (2)

Skersinės EM bangos

Vektoriniai EM bangos lygties sprendiniai

Banginė varža

Pointingo

vektorius

EM lauko

energijos tankis

Literatūra

[Panofsky and Phillips, 2005] Panofsky, W. and Phillips, M. (2005). *Classical electricity and magnetism*. Dover books on physics. Dover Publications.

[Stratton, 1941] Stratton, J. (1941). *Electromagnetic theory*. McGraw-Hill.

[Zahn, 2003] Zahn, M. (2003). *Electromagnetic field theory: a problem solving approach*. Krieger Pub. Co., Malabar, Fla.

## 10. EM bangos poliarizacija

Harmoniniai  
bangos lygties  
sprendiniai  
Bangos vektorius  
ir banginis  
skaičius  
Pointingo  
vektorius  
Poliarizacija  
Poliarizacijos  
elipsė  
Tiesinė  
poliarizacija  
Apskritiminė  
poliarizacija  
Apskritiminės  
poliarizacijos  
vektorių bazė  
Eliptinė  
poliarizacija  
Stokso parametrai  
Stokso parametrai  
– tiesinė pol.  
Stokso parametrai  
– apskritiminė  
pol.  
Literatūra

# 10. Harmoninės plokščiosios elektromagnetinės bangos poliarizacija



## Harmoniniai bangos lygties sprendiniai

Bendru atveju elektromagnetinio lauko bangos lygties sprendinį turėjom:

$$\varphi(kvt \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \varphi\left(\frac{kt}{\sqrt{\epsilon\mu}} \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\right), \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (1)$$

Harmoninių bangų atveju, naudodami kompleksines amplitudes, turėsime eksponentinę laiko ir koordinačių funkciją:

$$\varphi\left(\frac{kt}{\sqrt{\epsilon\mu}} \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\right) = e^{i\left(\frac{kt}{\sqrt{\epsilon\mu}} \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\right)}. \quad (2)$$

Harmoninių bangų atveju laikinę priklausomybę įprasta nusakyti **cikliniu dažniu**  $\omega$ :

$$\varphi = e^{i\left(\frac{kt}{\sqrt{\epsilon\mu}} \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\right)} = e^{i(\omega t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = \cos(\omega t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + i \sin(\omega t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (3)$$

iš čia

$$\omega = \frac{k}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (4)$$

10. EM bangos poliarizacija  
Harmoniniai bangos lygties sprendiniai  
Bangos vektorius ir banginis skaičius  
Pointingo vektorius  
Poliarizacija  
Poliarizacijos elipsė  
Tiesinė poliarizacija  
Apskritiminė poliarizacija  
Apskritiminės poliarizacijos vektorių bazė  
Eliptinė poliarizacija  
Stokso parametrai  
Stokso parametrai – tiesinė pol.  
Stokso parametrai – apskritiminė pol.  
Literatūra

## Bangos vektorius ir banginis skaičius

Bangų fizikoje  $\mathbf{k}$  vadinamas *bangos vektoriumi*, o  $k = |\mathbf{k}|$  – *banginiu skaičiumi*. Pasinaudoję  $\omega$  sąryšiais su paprastu dažniu  $f$  ir periodu  $T$ , bangos ilgiu  $\lambda = vT$ , ir nagrinėdami bangų sklidimą vakuume  $v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ , gausime tokias bangos skaičiaus išraiškas:

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (5)$$

Vadinasi, harmoninio kitimo atveju  $k$  nusako fizikinio vyksmo laiko arba atstumo matavimo vieneto pasirinkimo būdą, nes  $T \sim k^{-1}$  ir  $\lambda \sim k^{-1}$ .

10. EM bangos poliarizacija  
Harmoniniai bangos lygties sprendiniai  
Bangos vektorius ir banginis skaičius  
Pointingo vektorius  
Poliarizacija  
Poliarizacijos elipsė  
Tiesinė poliarizacija  
Apskritiminė poliarizacija  
Apskritiminės poliarizacijos vektorių bazė  
Eliptinė poliarizacija  
Stokso parametrai  
Stokso parametrai – tiesinė pol.  
Stokso parametrai – apskritiminė pol.  
Literatūra

## Harmoninių bangų Pointingo vektorius

Harmoninių bangų atveju elektromagnetinio lauko vektoriai:

$$\mathbf{E} = k[\mathbf{k} \times \mathbf{A}]e^{i\left(\frac{k}{\sqrt{\epsilon\mu}}t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\right)}, \quad (6)$$

$$\mathbf{H} = \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{A}]e^{i\left(\frac{k}{\sqrt{\epsilon\mu}}t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\right)}. \quad (7)$$

Pointingo vektorius bendru atveju

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (8)$$

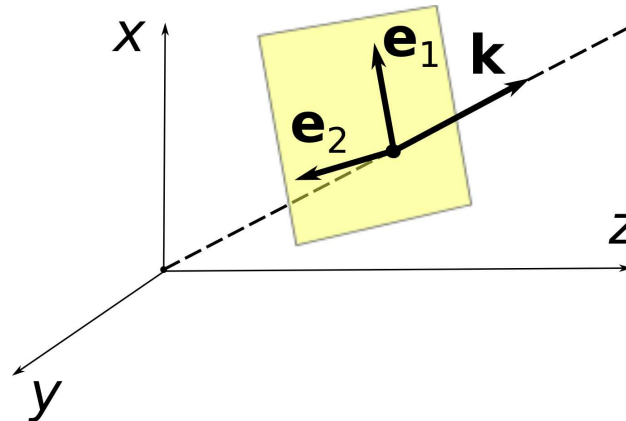
o harmoninių bangų atveju Pointingo vektoriaus vidurkis išreiškiamas kompleksinėmis amplitudėmis

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} k^2 [\mathbf{k} \times \mathbf{A}]^2 \mathbf{k}_0 = \Pi \mathbf{k}_0. \quad (9)$$

10. EM bangos poliarizacija  
Harmoniniai bangos lygties sprendiniai  
Bangos vektorius ir banginis skaičius  
Pointingo vektorius  
Poliarizacija  
Poliarizacijos elipsė  
Tiesinė poliarizacija  
Apskritiminė poliarizacija  
Apskritiminės poliarizacijos vektorių bazė  
Eliptinė poliarizacija  
Stokso parametrai  
Stokso parametrai – tiesinė pol.  
Stokso parametrai – apskritiminė pol.  
Literatūra

## Plokščiosios elektromagnetinės bangos poliarizacija

Elektromagnetinės bangos  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{H}$  vektorių orientaciją nusako  $\mathbf{A}$  kuri lemia bangos žadinimas bei sklidimo per aplinką ypatumai. Bet kokiu atveju  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ . Elektromagnetinės bangos poliarizaciją nusako  $\mathbf{E}$  vektoriaus kryptis.



1 pav.: Elektromagnetinės bangos poliarizacijos geometrija.

Bendru atveju  $\mathbf{E}$  kryptį galima aprašyti dviejų bangų superpozicija:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_1 E_1 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (10)$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_2 E_2 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (11)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{e}_1 E_1 + \mathbf{e}_2 E_2) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (12)$$

čia  $E_1 = a_1 e^{i\varphi_1}$ ,  $E_2 = a_2 e^{i\varphi_2}$  – kompleksinės amplitudės.

10. EM bangos poliarizacija  
Harmoniniai bangos lygties sprendiniai  
Bangos vektorius ir banginis skaičius  
Pointingo vektorius  
Poliarizacija  
Poliarizacijos elipsė  
Tiesinė poliarizacija  
Apskritiminė poliarizacija  
Apskritiminės poliarizacijos vektorių bazė  
Eliptinė poliarizacija  
Stokso parametrai  
Stokso parametrai – tiesinė pol.  
Stokso parametrai – apskritiminė pol.  
Literatūra

## Poliarizacijos elipsė

Panagrinėsime, kaip kinta reali  $\mathbf{E}$  vektoriaus dalis bangos sklidimo metu, išskaidydami ją komponentėmis:

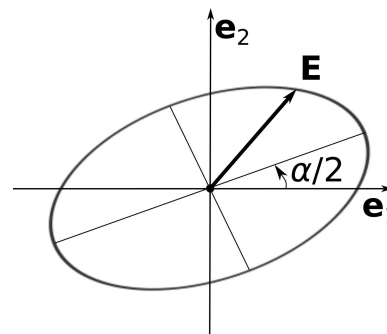
$$E_{r1} = \text{Re}\{\mathbf{E}_1\} = a_1 \cos(\beta + \varphi_1),$$

$$E_{r2} = \text{Re}\{\mathbf{E}_2\} = a_2 \cos(\beta + \varphi_2),$$

čia  $\beta = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ . Eliminavę bangos sklidimą aprašantį kintamąjį  $\beta$ , gauname *elipsės* lygtį:

$$\left(\frac{E_{r1}}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_{r2}}{a_2}\right)^2 - 2\frac{E_{r1}}{a_1}\frac{E_{r2}}{a_2}\cos\varphi = \sin^2\varphi, \quad (13)$$

čia  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  – fazių skirtumas tarp  $E_2$  ir  $E_1$  dedamųjų. Todėl bendru atveju elektromagnetinė banga yra vadinama *eliptiškai poliarizuota*.



2 pav.: Poliarizacijos elipsė.

10. EM bangos poliarizacija  
Harmoniniai bangos lygties sprendiniai  
Bangos vektorius ir banginis skaičius  
Pointingo vektorius  
Poliarizacija  
Poliarizacijos elipsė  
Tiesinė poliarizacija  
Apskritiminė poliarizacija  
Apskritiminės poliarizacijos vektorių bazė  
Eliptinė poliarizacija  
Stokso parametrai  
Stokso parametrai – tiesinė pol.  
Stokso parametrai – apskritiminė pol.  
Literatūra

## Tiesinė poliarizacija

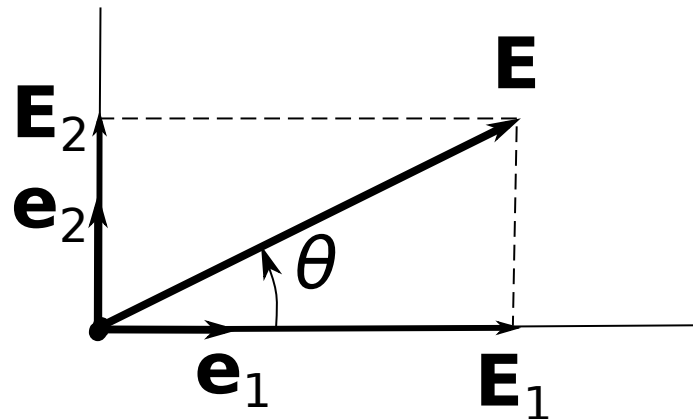
Jei  $E_1$  ir  $E_2$  turi tą pačią fazę, tai banga vadinama *tiesiškai poliarizuota*,

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = m\pi, \quad \frac{E_2}{E_1} = (-1)^m \frac{a_2}{a_1}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Tiesiškai poliarizuotai bangai galioja:

$$\theta = \arctan(E_2/E_1),$$

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}.$$



3 pav.: Tiesinė poliarizacija.

10. EM bangos poliarizacija  
Harmoniniai bangos lygties sprendiniai  
Bangos vektorių ir banginis skaičius  
Pointingo vektorių  
Poliarizacija  
Poliarizacijos elipsė  
Tiesinė poliarizacija  
Apskritinė poliarizacija  
Apskritinės poliarizacijos vektorių bazė  
Eliptinė poliarizacija  
Stokso parametrai  
Stokso parametrai – tiesinė pol.  
Stokso parametrai – apskritinė pol.  
Literatūra

## Apskritiminė poliarizacija

Vienas iš eliptinės poliarizacijos atvejų – *apskritiminė poliarizacija*, kai  $E_1$  ir  $E_2$  amplitudės lygios, o fazių skirtumas kartotinis  $\pi/2$ :

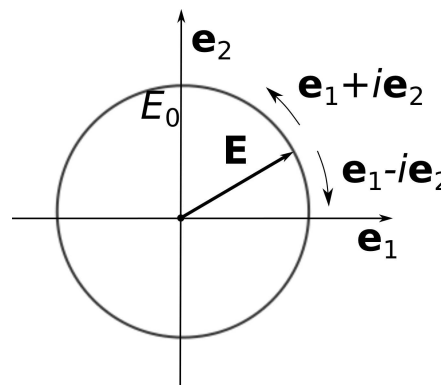
$$a_1 = a_2 = a, \quad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = m \pi/2, \quad m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

Tada elektrinio lauko vektorius yra lygus

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2)e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})},$$

arba dedamosiomis

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mp E_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}).$$



4 pav.: Apskritiminė poliarizacija.

10. EM bangos poliarizacija  
Harmoniniai bangos lygties sprendiniai  
Bangos vektorius ir banginis skaičius  
Pointingo vektorius  
Poliarizacija  
Poliarizacijos elipsė  
Tiesinė poliarizacija  
Apskritiminė poliarizacija  
Apskritiminės poliarizacijos vektorių bazė  
Eliptinė poliarizacija  
Stokso parametrai  
Stokso parametrai – tiesinė pol.  
Stokso parametrai – apskritiminė pol.  
Literatūra

## Apskritiminės poliarizacijos vektorių bazė

Galima įvesti kompleksinę ortonormuotą vektorių bazę

$$\mathbf{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2), \quad (14)$$

turinčią tokias savybes:

$$\mathbf{e}_{\pm}^* \cdot \mathbf{e}_{\mp} = 0, \quad (15)$$

$$\mathbf{e}_{\pm}^* \cdot \mathbf{e}_{\pm} = 1. \quad (16)$$

Naujoje koordinatinių sistemoje,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{e}_+ E_+ + \mathbf{e}_- E_-) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (17)$$

čia  $E_+ = a_+ e^{i\varphi_+}$ ,  $E_- = a_- e^{i\varphi_-}$  yra kompleksinės amplitudės.

10. EM bangos poliarizacija  
Harmoniniai bangos lygties sprendiniai  
Bangos vektorių ir banginis skaičius  
Pointingo vektorių  
Poliarizacija  
Poliarizacijos elipsė  
Tiesinė poliarizacija  
Apskritiminė poliarizacija  
Apskritiminės poliarizacijos vektorių bazė  
Eliptinė poliarizacija  
Stokso parametrai  
Stokso parametrai – tiesinė pol.  
Stokso parametrai – apskritiminė pol.  
Literatūra



## Eliptinė poliarizacija

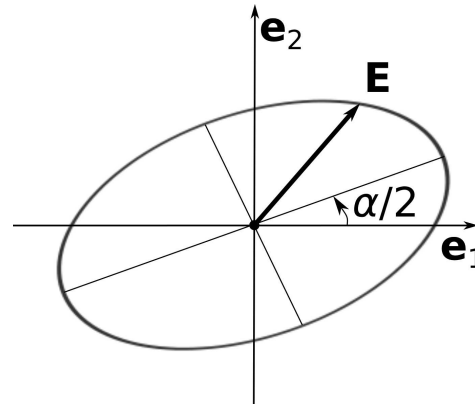
$E_+$ ,  $E_-$  bendru atveju aprašo eliptinę poliarizaciją, kur elipsės parametrai priklauso nuo santykio

$$\frac{E_-}{E_+} = r e^{i\alpha}, \quad (18)$$

$$\left| \frac{1+r}{1-r} \right| - \text{didžiosios ir mažosios elipsės ašių santykis,}$$

$\alpha/2$  – elipsės polinkio kampas.

$r = \pm 1$  – atitinka tiesiškai poliarizuotą bangą.



5 pav.: Eliptinė poliarizacija.

10. EM bangos poliarizacija  
Harmoniniai bangos lygties sprendiniai  
Bangos vektorius ir banginis skaičius  
Pointingo vektorius  
Poliarizacija  
Poliarizacijos elipsė  
Tiesinė poliarizacija  
Apskritiminė poliarizacija  
Apskritiminės poliarizacijos vektorių bazė  
Eliptinė poliarizacija  
Stokso parametrai  
Stokso parametrai – tiesinė pol.  
Stokso parametrai – apskritiminė pol.  
Literatūra

## Stokso parametrai

Praktiškai svarbus uždavinys – kaip nustatyti bangos poliarizaciją žinant  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ .

Tam yra naudingi *Stokso parametrai*, kurie gali būti eksperimentiškai išmatuoti pagal bangos intensyvumą naudojant tiesinį poliarizatorių arba ketvirčio bangos plokštelę [Born and Wolf, 1986].

Eksperimentiškai stebimi dydžiai – tai poliarizacijos projekcijų

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{e}_+^* \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{e}_-^* \cdot \mathbf{E}$$

kvadratiniai dariniai.

- 10. EM bangos poliarizacija
- Harmoniniai bangos lygties sprendiniai
- Bangos vektorius ir banginis skaičius
- Pointingo vektorius
- Poliarizacija
- Poliarizacijos elipsė
- Tiesinė poliarizacija
- Apskritiminė poliarizacija
- Apskritiminės poliarizacijos vektorių bazė
- Eliptinė poliarizacija
- Stokso parametrai
- Stokso parametrai – tiesinė pol.
- Stokso parametrai – apskritiminė pol.
- Literatūra

## Stokso parametrai tiesinės poliarizacijos vektorių bazėje

Stokso parametrai:

$$s_0 = |\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}|^2 + |\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E}|^2 = a_1^2 + a_2^2, \quad (19)$$

$$s_1 = |\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}|^2 - |\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E}|^2 = a_1^2 - a_2^2, \quad (20)$$

$$s_2 = 2 \operatorname{Re}\{(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E})^* (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E})\} = 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (21)$$

$$s_3 = 2 \operatorname{Im}\{(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E})^* (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E})\} = 2a_1 a_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (22)$$

Iš Stokso parametrų galima išskaičiuoti poliarizacijos komponentių amplitudes ir fazių skirtumą:

$$a_1^2 = \frac{s_0 + s_1}{2}, \quad (23)$$

$$a_2^2 = \frac{s_0 - s_1}{2}, \quad (24)$$

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \arctan \frac{s_3}{s_2}. \quad (25)$$

10. EM bangos poliarizacija  
Harmoniniai bangos lygties sprendiniai  
Bangos vektorių ir banginis skaičius  
Pointingo vektorių  
Poliarizacija  
Poliarizacijos elipsė  
Tiesinė poliarizacija  
Apskritiminė poliarizacija  
Apskritiminės poliarizacijos vektorių bazė  
Eliptinė poliarizacija  
Stokso parametrai  
Stokso parametrai – tiesinė pol.  
Stokso parametrai – apskritiminė pol.  
Literatūra

## Stokso parametrai apskritiminės poliarizacijos vektorių bazėje

Panašiai Stokso parametrai užrašomi ir apskritiminės poliarizacijos vektorių bazėje:

$$s_0 = |\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{E}|^2 + |\mathbf{e}_- \cdot \mathbf{E}|^2 = a_+^2 + a_-^2, \quad (26)$$

$$s_1 = 2 \operatorname{Re}\{(\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{E})^*(\mathbf{e}_- \cdot \mathbf{E})\} = 2a_+a_- \cos(\varphi_- - \varphi_+), \quad (27)$$

$$s_2 = 2 \operatorname{Im}\{(\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{E})^*(\mathbf{e}_- \cdot \mathbf{E})\} = 2a_+a_- \sin(\varphi_- - \varphi_+), \quad (28)$$

$$s_3 = |\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{E}|^2 - |\mathbf{e}_- \cdot \mathbf{E}|^2 = a_+^2 - a_-^2. \quad (29)$$

Keturi Stokso parametrai nėra nepriklausomi, jie surišti sąlyga:

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \quad (30)$$

Grafiškai Stokso parametrai gali būti atvaizduojami *Puankarė sfera*.

Plačiau apie Stokso parametrų panaudojimą bei Puankarė sferą: [Born and Wolf, 1986].

- 10. EM bangos poliarizacija
- Harmoniniai bangos lygties sprendiniai
- Bangos vektorių ir banginis skaičius
- Pointingo vektorių
- Poliarizacija
- Poliarizacijos elipsė
- Tiesinė poliarizacija
- Apskritiminė poliarizacija
- Apskritiminės poliarizacijos vektorių bazė
- Eliptinė poliarizacija
- Stokso parametrai
- Stokso parametrai – tiesinė pol.
- Stokso parametrai – apskritiminė pol.
- Literatūra

## Literatūra



[Born and Wolf, 1986] Born, M. and Wolf, E. (1986). *Principles of optics*. Pergamon Press.

10. EM bangos poliarizacija  
Harmoniniai bangos lygties sprendiniai  
Bangos vektorius ir banginis skaičius  
Pointingo vektorius  
Poliarizacija  
Poliarizacijos elipsė  
Tiesinė poliarizacija  
Apskritiminė poliarizacija  
Apskritiminės poliarizacijos vektorių bazė  
Eliptinė poliarizacija  
Stokso parametrai  
Stokso parametrai – tiesinė pol.  
Stokso parametrai – apskritiminė pol.

Literatūra

11.  
Elektrodinaminiai  
potencialai

Elektrodinaminiai  
potencialai (1)

Elektrodinaminiai  
potencialai (2)

Elektrodinaminių  
potencialų lygtys

Lorenco  
kalibravimo  
sąlyga (1)

Lorenco  
kalibravimo  
sąlyga (2)

Kulono  
kalibravimo  
sąlyga

Išilginė ir  
statmenoji  
elektros srovės  
tankio dedamosios

Kulono  
kalibravimo  
sąlyga – *skersinė*  
arba *spinduliavimo*  
sąlyga

Kulono  
kalibravimo  
sąlyga ir  
priežastingumas

Literatūra

## 11. Elektrodinaminiai potencialai

## Maksvelio lygtys ir elektrodinaminiai potencialai (1)

Maksvelio lygtys susieja penkis vektorinius dydžius  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{j}$  ir vieną skaliarinį –  $\rho$ .

$\rho$  ir  $\mathbf{j}$  susieti *srovės tolydumo lygtimi*.

Izotropinėse ir tiesinėse medžiagose  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{D}$  bei  $\mathbf{H}$  ir  $\mathbf{B}$  skiriasi tik daugikliais.

Kai yra žinomi lauko šaltiniai  $\rho$  ir  $\mathbf{j}$ , iš Maksvelio lygčių pakanka rasti du vektorinius dydžius.

Elektrodinaminių uždavinių supaprastinimui įvedamos pagalbinės funkcijos – *elektrodinaminiai potencialai*:

- Vektorinis potencialas  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ ,
- Skaliarinis potencialas  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ .

11.  
Elektrodinaminiai potencialai  
Elektrodinaminiai potencialai (1)  
Elektrodinaminiai potencialai (2)  
Elektrodinaminių potencialų lygtys  
Lorenco kalibravimo sąlyga (1)  
Lorenco kalibravimo sąlyga (2)  
Kulono kalibravimo sąlyga  
Išilginė ir statmenoji elektros srovės tankio dedamosios Kulono kalibravimo sąlyga – *skersinė* arba *spinduliavimo* sąlyga  
Kulono kalibravimo sąlyga ir priešastingumas  
Literatūra

## Maksvelio lygtys ir elektrodinaminiai potencialai (2)

Potencialus galima įvesti įvairiais būdais. Vienas iš būdų – kad tapatingai galiotų Maksvelio lygtys: Faradėjaus elektromagnetinės indukcijos dėsnis ir magnetinės indukcijos linijų uždarumo sąlyga:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Tam užrašysime  $\mathbf{B}$  ir  $\mathbf{E}$  išraiškas elektrodinaminiais potencialais:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{1}$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{2}$$

11.  
Elektrodinaminiai potencialai  
Elektrodinaminiai potencialai (1)  
Elektrodinaminiai potencialai (2)  
Elektrodinaminių potencialų lygtys  
Lorenco kalibravimo sąlyga (1)  
Lorenco kalibravimo sąlyga (2)  
Kulono kalibravimo sąlyga  
Išilginė ir statmenoji elektros srovės tankio dedamosios Kulono kalibravimo sąlyga – skersinė arba spinduliavimo sąlyga  
Kulono kalibravimo sąlyga ir priešastingumas  
Literatūra



## Elektrodinaminių potencialų lygtys

Elektrodinaminiai potencialai  $\mathbf{A}$  ir  $\varphi$  turi būti tokie, kad galiojūt likusios Maksvelio lygtys – Ampero ir Kulono dėsniai:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho.$$

Iš šių lygčių gauname diferencialines lygtis elektrodinaminiam potencialams:

$$\Delta \mathbf{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \left( \operatorname{div} \mathbf{A} - \epsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu \mathbf{j}, \quad (3)$$

$$\Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (4)$$

Potencialų apibrėžimo nevienareikšmiškumas – elektromagnetinio lauko vektoriai nepasikeis, pakeitus

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi,$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

Potencialų parinkimo nevienareikšmiškumo sąlygos vadinamos *kalibravimo sąlygomis*.

11.

Elektrodinaminiai potencialai

Elektrodinaminiai potencialai (1)

Elektrodinaminiai potencialai (2)

Elektrodinaminių potencialų lygtys

Lorenco kalibravimo sąlyga (1)

Lorenco kalibravimo sąlyga (2)

Kulono kalibravimo sąlyga

Išilginė ir statmenoji elektros srovės tankio dedamosios Kulono kalibravimo sąlyga – skersinė arba spinduliavimo sąlyga

Kulono kalibravimo sąlyga ir priešastingumas

Literatūra

## Lorenco kalibravimo sąlyga (1)

Naudojant *Lorenco kalibravimo sąlygą*

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

vektorinio (3) ir skaliarinio (4) potencialo lygtys tampa atskirtomis nehomogeninėmis bangos lygtimis:

$$\Delta \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j}, \quad (5)$$

$$\Delta \varphi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (6)$$

Kalibravimo sąlyga taip pat apriboja ir  $\chi$  pasirinkimą:

$$\Delta \chi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0.$$

11.  
Elektrodinaminiai potencialai  
Elektrodinaminiai potencialai (1)  
Elektrodinaminiai potencialai (2)  
Elektrodinaminė potencialų lygtys  
Lorenco kalibravimo sąlyga (1)  
Lorenco kalibravimo sąlyga (2)  
Kulono kalibravimo sąlyga  
Išilginė ir statmenoji elektros srovės tankio dedamosios  
Kulono kalibravimo sąlyga – skersinė arba spinduliavimo sąlyga  
Kulono kalibravimo sąlyga ir priešastingumas  
Literatūra

## Lorencio kalibravimo sąlyga (2)

Lorencio kalibravimo sąlyga aprašoma bangos lygtimis ir nepriklauso nuo koordinatinių sistemos pasirinkimo bei invariantinė Lorencio transformacijų atžvilgiu, todėl plačiai naudojama reliatyvumo teorijoje.

Įvedus d'Alamberto operatorių

$$\square \equiv \Delta - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (7)$$

potencialų lygtys supaprastėja:

$$\square \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}, \quad (8)$$

$$\square \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (9)$$

11.  
Elektrodinaminiai potencialai  
Elektrodinaminiai potencialai (1)  
Elektrodinaminiai potencialai (2)  
Elektrodinaminė lygtys Lorencio kalibravimo sąlyga (1)  
Lorencio kalibravimo sąlyga (2)  
Kulono kalibravimo sąlyga  
Išilginė ir statmenoji elektros srovės tankio dedamosios Kulono kalibravimo sąlyga – skersinė arba spinduliavimo sąlyga  
Kulono kalibravimo sąlyga ir priešastingumas  
Literatūra

## Kulono kalibravimo sąlyga

Pritaikius *Kulono kalibravimo sąlygą*

$$\text{div } \mathbf{A} = 0,$$

potencialų lygtys tampa

$$\Delta \mathbf{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \epsilon \mu \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\mu \mathbf{j}, \quad (10)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (11)$$

Puasono lygties  $\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$  sprendinys yra momentinis Kulono potencialas:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (12)$$

Vektorinis potencialas tenkina nehomogeninę bangos lygtį:

$$\Delta \mathbf{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j} + \epsilon \mu \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (13)$$

čia  $\varphi$  surandamas iš Puasono lygties.

$\chi$  kalibravimo sąlyga:  $\Delta \chi = 0$ .

11.  
Elektrodinaminiai  
potencialai

Elektrodinaminiai  
potencialai (1)

Elektrodinaminiai  
potencialai (2)

Elektrodinaminų  
potencialų lygtys

Lorenco  
kalibravimo  
sąlyga (1)

Lorenco  
kalibravimo  
sąlyga (2)

Kulono  
kalibravimo  
sąlyga

Išilginė ir  
statmenoji  
elektros srovės  
tankio dedamosios

Kulono  
kalibravimo  
sąlyga – *skersinė*

arba *spinduliavimo*  
sąlyga

Kulono  
kalibravimo  
sąlyga ir

priežastingumas  
Literatūra

## Išilginė ir statmenoji elektros srovės tankio dedamosios

Srovės tankį  $\mathbf{j}$ , kuris yra vektorinio potencialo  $\mathbf{A}$  šaltinis, išskaidysime į išilginę ir statmeną dedamasias,

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp},$$

kurioms galioja tokios savybės:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\parallel} & - \text{išilginė (nesisukanti) dedamoji, nes} & \text{rot } \mathbf{j}_{\parallel} = \nabla \times \mathbf{j}_{\parallel} = 0, \\ \mathbf{j}_{\perp} & - \text{statmena (solenoidinė) dedamoji, nes} & \text{div } \mathbf{j}_{\perp} = \nabla \cdot \mathbf{j}_{\perp} = 0. \end{aligned}$$

Srovės tankio išskaidymą dedamosiomis panaudosime vektorinio potencialo bangos lygtyje (13), pertvarkydami gradientinį skaliarinio potencialo dėmenį:

$$\epsilon\mu \text{ grad } \frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Pasinaudosime šiomis tapatybėmis:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} & = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \Delta \mathbf{A} & = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}). \end{aligned}$$

ir srovės tolydumo lygtimi  $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ .

11.  
Elektrodinaminiai potencialai  
Elektrodinaminiai potencialai (1)  
Elektrodinaminiai potencialai (2)  
Elektrodinaminių potencialų lygtys  
Lorenco kalibravimo sąlyga (1)  
Lorenco kalibravimo sąlyga (2)  
Kulono kalibravimo sąlyga  
Išilginė ir statmenoji elektros srovės tankio dedamosios  
Kulono kalibravimo sąlyga – skersinė arba spinduliavimo sąlyga  
Kulono kalibravimo sąlyga ir priešastingumas  
Literatūra

## Kulono kalibravimo sąlyga – skersinė arba spinduliavimo sąlyga

Pasinaudoję momentinio Kulono potencialo išraiška (12) ir atlikę supaprastinimus, gauname:

$$\begin{aligned}\epsilon\mu \operatorname{grad} \frac{\partial\varphi}{\partial t} &= \epsilon\mu \frac{1}{4\pi\epsilon} \nabla_r \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = -\frac{\mu}{4\pi} \Delta_r \int \frac{\mathbf{j}_{\parallel}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \\ &= \mu \int \mathbf{j}_{\parallel}(\mathbf{r}', t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' = \mu \mathbf{j}_{\parallel}(\mathbf{r}, t).\end{aligned}$$

Vektorinio potencialo lygtis (13) tampa

$$\Delta \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j} + \epsilon\mu \operatorname{grad} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\mu (\mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp}) + \mu \mathbf{j}_{\parallel} = -\mu \mathbf{j}_{\perp}, \quad (14)$$

t.y. spinduliuojamas laukas aprašomas tik vektoriniu potencialu, kurio šaltinis – skersinė srovės tankio dedamoji. Momentinis skaliarinis Kulono potencialas  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  daro įtaką tik artimosios zonos elektromagnetiniam laukui. Todėl Kulono kalibravimo sąlyga kartais vadinama *skersine* arba *spinduliavimo* sąlyga [Jackson, 1999, Jackson, 2002, Brill and Goodman, 1967].

11.  
Elektrodinaminiai potencialai  
Elektrodinaminiai potencialai (1)  
Elektrodinaminiai potencialai (2)  
Elektrodinaminų potencialų lygtys  
Lorenco kalibravimo sąlyga (1)  
Lorenco kalibravimo sąlyga (2)  
Kulono kalibravimo sąlyga  
Išilginė ir statmenoji elektros srovės tankio dedamosios  
Kulono kalibravimo sąlyga – skersinė arba spinduliavimo sąlyga  
Kulono kalibravimo sąlyga ir priešastingumas  
Literatūra

## Kulono kalibravimo sąlyga ir priešastingumas

Iš Kulono kalibravimo sąlygos seka, kad skaliarinis potencialas (12) kinta momentiška, kai tuo tarpu žinome, kad elektromagnetinė sąveika yra perduodama baigtiniu – šviesos greičiu. Tokia nefizikine savybe pasižymi tik skaliarinis potencialas  $\varphi$ . Tiek vektorinis potencialas  $\mathbf{A}$ , tiek ir elektromagnetinio lauko vektoriai erdvėje sklinda su vėlavimu pagal bangos lygtį (13). Kvantinėje elektrodinamikoje nagrinėjant fotonus kvantuojamas taip pat tik vektorinis potencialas.

Kulono kalibravimo sąlyga dažnai naudojama homogeninės bangos lygties atveju, kai nėra lauko šaltinių. Tada

$$\begin{aligned}\varphi &= 0, \\ \Delta \mathbf{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= 0, \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.\end{aligned}$$

Šiuo atveju bangos laukui aprašyti užtenka tik vektorinio potencialo.

Apie Kulono kalibravimo sąlygą daugiau:  
[Jackson, 2002, Brill and Goodman, 1967].

11.  
Elektrodinaminiai potencialai  
Elektrodinaminiai potencialai (1)  
Elektrodinaminiai potencialai (2)  
Elektrodinaminų potencialų lygtys  
Lorenco kalibravimo sąlyga (1)  
Lorenco kalibravimo sąlyga (2)  
Kulono kalibravimo sąlyga  
Išilginė ir statmenoji elektros srovės tankio dedamosios Kulono kalibravimo sąlyga – skersinė arba spinduliavimo sąlyga  
Kulono kalibravimo sąlyga ir priešastingumas  
Literatūra

# Literatūra



11.  
Elektrodinaminiai  
potencialai  
Elektrodinaminiai  
potencialai (1)  
Elektrodinaminiai  
potencialai (2)  
Elektrodinaminių  
potencialų lygtys  
Lorenco  
kalibravimo  
sąlyga (1)  
Lorenco  
kalibravimo  
sąlyga (2)  
Kulono  
kalibravimo  
sąlyga  
Išilginė ir  
statmenoji  
elektros srovės  
tankio dedamosios  
Kulono  
kalibravimo  
sąlyga – skersinė  
arba spinduliavimo  
sąlyga  
Kulono  
kalibravimo  
sąlyga ir  
priežastingumas  
Literatūra

- [Brill and Goodman, 1967] Brill, O. L. and Goodman, B. (1967). Causality in the Coulomb gauge. *American Journal of Physics*, 35(9):832.
- [Griffiths, 1999] Griffiths, D. (1999). *Introduction to electrodynamics*. Prentice Hall.
- [Jackson, 1999] Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics*. Wiley.
- [Jackson, 2002] Jackson, J. D. (2002). From Lorenz to Coulomb and other explicit gauge transformations. *American Journal of Physics*, 70(9):917.
- [Jackson and Okun, 2001] Jackson, J. D. and Okun, L. B. (2001). Historical roots of gauge invariance. *Rev. Mod. Phys.*, 73:663–680.
- [Rousseaux et al., 2008] Rousseaux, G., Kofman, R., and Minazzoli, O. (2008). The Maxwell-Lodge effect: Significance of electromagnetic potentials in the classical theory. *The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, 49:249–256.



## 12. Herco vektoriai

---

Elektrinė  
poliarizacija ir  
įmagnetėjimas  
Apibendrintieji  
krūviai ir srovės  
Elektrodinaminių  
potencialų lygtys  
Elektrinis ir  
magnetinis Herco  
vektoriai  
Išvados (1)  
Išvados (2)  
Literatūra

# 12. Herco vektoriai

## Elektrinė poliarizacija, įmagnetėjimas ir elektrodinaminiai potencialai

12. Herco vektoriai

Elektrinė poliarizacija ir įmagnetėjimas

Apibendrintieji krūviai ir srovės Elektrodinaminių potencialų lygtys Elektrinis ir magnetinis Herco vektoriai

Išvados (1)

Išvados (2)

Literatūra

Elektrodinaminius potencialus galima įvesti įvairiais būdais. Kai kurių uždavinių sprendimui naudojami potencialai, vadinami *Herco vektoriais* arba *poliarizacijos potencialais*. Juos pirmieji įvedė Hercas (1888) ir Righi (1901).

Nagrinėsime tiesines izotropines medžiagas, aprašomas elektrinės poliarizacijos vektoriumi (poliarizuotumu)  $\mathbf{P}$  ir įmagnetėjimu  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \mu_0 \chi_m \mathbf{H}. \quad (2)$$

Elektromagnetinį lauką buvom aprašę elektrodinaminiais potencialais  $\mathbf{A}$  ir  $\varphi$ . Mūsų tikslas – įvesti elektrodinaminius potencialus  $\mathbf{\Pi}_e$  ir  $\mathbf{\Pi}_m$ , kurie tapatingai tenkintų Lorencio kalibravimo sąlygą ir kurie tam tikrais atvejais supaprastintų uždavinių sprendimą.

Turėjome vektorinį ir skaliarinį potencialus:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (3)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\text{div } \mathbf{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad \leftarrow \text{Lorencio kalibravimo sąlyga} \quad (5)$$

## Apibendrintieji krūviai ir srovės

Maksvelio lygtis galima užrašyti tokiu pavidalu:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}_a, \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_a, \quad (8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (9)$$

čia

$$\mathbf{j}_a = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{M} + \mathbf{j}, \quad \leftarrow \text{Apibendrintas srovės tankis}$$

$$\rho_a = \rho - \operatorname{div} \mathbf{P}. \quad \leftarrow \text{Apibendrintas krūvio tankis}$$

12. Herco  
vektoriai  
Elektrinė  
poliarizacija ir  
įmagnetėjimas  
Apibendrintieji  
krūviai ir srovės  
Elektrodinaminių  
potencialų lygtys  
Elektrinis ir  
magnetinis Herco  
vektoriai  
Išvados (1)  
Išvados (2)  
Literatūra

## Elektrodinaminių potencialų lygtys su elektrinės poliarizacijos ir įmagnetėjimo šaltiniais

Naudodami Lorencio kalibravimo sąlygą turėjome tokias elektrodinaminių potencialų lygtis, kurių šaltiniai – krūvio ir srovės tankiai:

$$\Delta\varphi - \epsilon\mu \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad (10)$$

$$\Delta\mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{j}. \quad (11)$$

Panagrinesime atvejį, kai nėra makroskopinių krūvių ir srovių,  $\rho = 0$  ir  $\mathbf{j} = 0$ , o apibendrintus krūvius ir sroves sudaro elektrinės poliarizacijos ir įmagnetėjimo reiškinius aprašantys nariai. Tada potencialų lygtis galima užrašyti:

$$\Delta\varphi - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{P}, \quad (12)$$

$$\Delta\mathbf{A} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} - \mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{M}, \quad (13)$$

tokiu būdu potencialų šaltiniai yra elektrinės poliarizacijos  $\mathbf{P}$  ir įmagnetėjimo  $\mathbf{M}$  funkcijos.

12. Herco  
vektoriai

Elektrinė  
poliarizacija ir  
įmagnetėjimas  
Apibendrintieji  
krūviai ir srovės  
Elektrodinaminių  
potencialų lygtys

Elektrinis ir  
magnetinis Herco  
vektoriai

Išvados (1)

Išvados (2)

Literatūra

## Elektrinis ir magnetinis Herco vektoriai

Remdamiesi potencialų šaltinių išraiškomis įvesime elektrinį  $\mathbf{\Pi}_e$  ir magnetinį  $\mathbf{\Pi}_m$  Herco vektorius tokiu būdu, kad Lorencio kalibravimo sąlyga būtų tenkinama tapatingai:

$$\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}_e, \quad (14)$$

$$\mathbf{A} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t} + \mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}_m. \quad (15)$$

Herco vektoriai (polarizacijos potencialai) tenkina nehomogenines bangos lygtis, kurių šaltiniai yra  $\mathbf{P}$  ir  $\mathbf{M}$ :

$$\Delta \mathbf{\Pi}_e - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_e}{\partial t^2} = -\mathbf{P}, \quad (16)$$

$$\Delta \mathbf{\Pi}_m - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_m}{\partial t^2} = -\mathbf{M}. \quad (17)$$

12. Herco  
vektoriai

Elektrinė  
polarizacija ir  
įmagnetėjimas  
Apibendrintieji  
krūviai ir srovės  
Elektrodinaminių  
potencialų lygtys  
Elektrinis ir  
magnetinis Herco  
vektoriai

Išvados (1)

Išvados (2)

Literatūra

## Išvados (1)

Elektromagnetinio lauko vektorius  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{B}$  išreikšime Herco vektoriais  $\mathbf{\Pi}_e$  ir  $\mathbf{\Pi}_m$ :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad div } \mathbf{\Pi}_e - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_e}{\partial t^2} - \mu_0 \text{rot } \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t}, \quad (18)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \mu_0 \text{rot } \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t} + \mu_0 \text{rot rot } \mathbf{\Pi}_m. \quad (19)$$

Išvados:

1. Atskirais atvejais kai  $\mathbf{\Pi}_e = 0$  arba  $\mathbf{\Pi}_m = 0$ ,  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{B}$  vektoriai nelygūs nuliui, vadinasi elektromagnetinį lauką galima aprašyti tik trimis funkcijomis – vieno iš Herco vektorių  $\mathbf{\Pi}_e$  arba  $\mathbf{\Pi}_m$  dedamosiomis.
2. Kai  $\mathbf{\Pi}_e = 0$ ,  $\mathbf{\Pi}_m$  kuriamas  $\mathbf{E}$  laukas – visada sūkurinis,  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ . Jei elektromagnetinis procesas nepriklauso nuo laiko,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ,  $\mathbf{\Pi}_m$  aprašo tik statinį magnetinį lauką, jo kuriamas elektrinis laukas  $\mathbf{E} = 0$ .
3. Kai  $\mathbf{\Pi}_m = 0$ ,  $\mathbf{\Pi}_e$  kuriamas  $\mathbf{B}$  laukas – visada sūkurinis,  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ . Jei elektromagnetinis procesas nepriklauso nuo laiko,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ,  $\mathbf{\Pi}_e$  aprašo tik statinį elektrinį lauką, jo kuriamas magnetinis laukas  $\mathbf{B} = 0$ .

## Išvados (2)

4. Statinių laukų atveju, kai  $\mathbf{\Pi}_e \neq 0$  ir  $\mathbf{\Pi}_m \neq 0$ ,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad div } \mathbf{\Pi}_e, \quad \rightarrow \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad - \text{Potencialinis laukas}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \text{rot rot } \mathbf{\Pi}_m, \quad \rightarrow \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad - \text{Sūkurinis laukas}$$

Bet jei galioja

$$\Delta \mathbf{\Pi}_e = 0, \quad \text{tai} \quad \text{grad div } \mathbf{\Pi}_e = \text{rot rot } \mathbf{\Pi}_e \quad \rightarrow \quad \text{div } \mathbf{E} = 0,$$

$$\Delta \mathbf{\Pi}_m = 0, \quad \text{tai} \quad \text{rot rot } \mathbf{\Pi}_m = \text{grad div } \mathbf{\Pi}_m \quad \rightarrow \quad \text{rot } \mathbf{B} = 0,$$

t.y. elektrinis ir magnetinis laukai gali būti vienu metu ir potencialiniai, ir sūkuriniai.

## Literatūra



12. Herco  
vektoriai  
Elektrinė  
poliarizacija ir  
įmagnetėjimas  
Apibendrintieji  
krūviai ir srovės  
Elektrodinaminių  
potencialų lygtys  
Elektrinis ir  
magnetinis Herco  
vektoriai  
Išvados (1)  
Išvados (2)  
Literatūra

[Jackson, 1999] Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics*. Wiley.

[Panofsky and Phillips, 2005] Panofsky, W. and Phillips, M. (2005). *Classical electricity and magnetism*. Dover books on physics. Dover Publications.

[Stratton, 1941] Stratton, J. (1941). *Electromagnetic theory*. McGraw-Hill.



### 13. Elektrinis ir magnetinis dipoliai

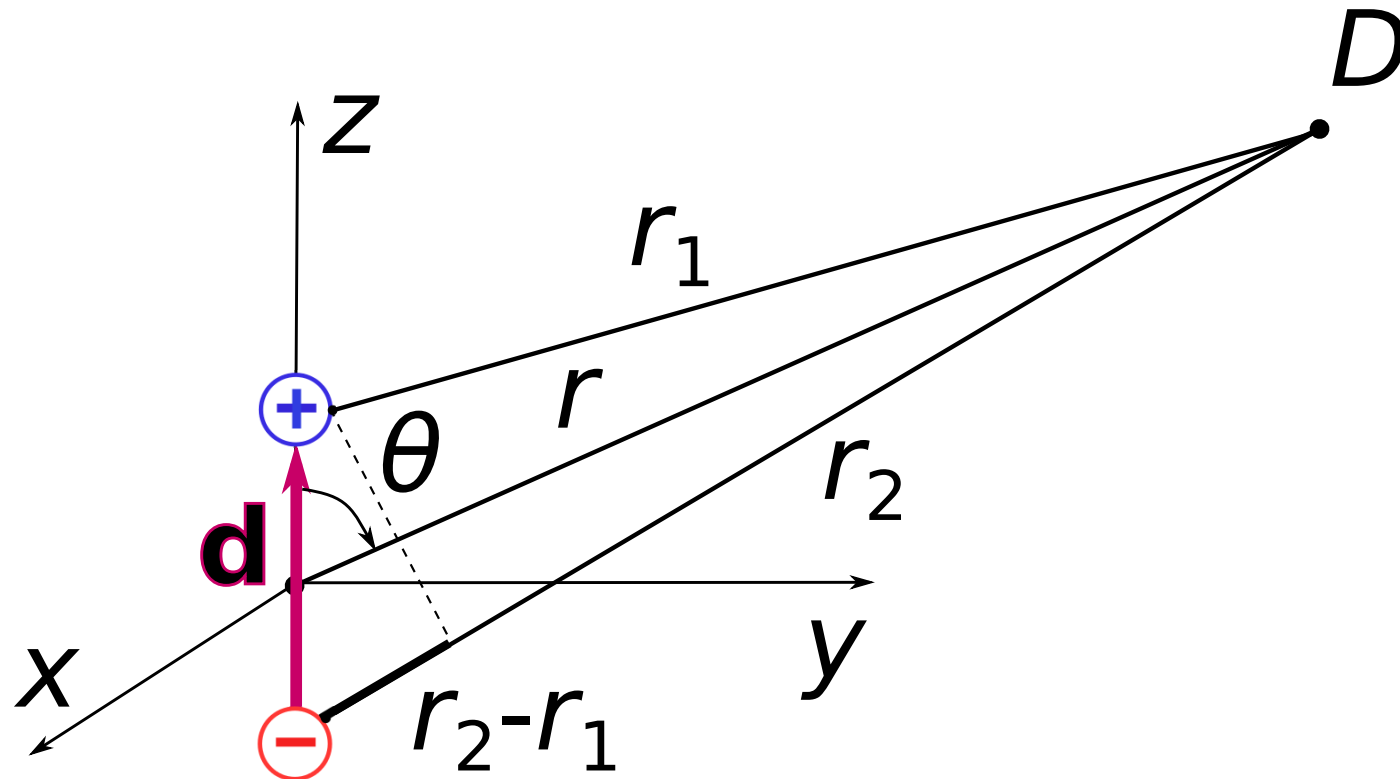
Elektrinis dipolis  
Elektrinio dipolio laukas  
Elektrinio dipolio laukas grafiškai  
Magnetinis dipolis  
Magnetinio dipolio potencialas  
Integravimo geometrija  
Magnetinio dipolio laukas  
Magnetinio dipolio laukas grafiškai  
**P** ir **M** fizikinė prasmė  
Elektrinis dipolis ir poliarizacijos vektorius  
Magnetinis dipolis ir įmagnetėjimo vektorius  
Literatūra

## 13. Elektrinis ir magnetinis dipoliai

## Elektrinis dipolis

Elektrinis dipolis – tai dviejų absoliutiniu dydžiu lygių, bet priešingų ženklų krūvių sistema, kai atstumas tarp jų  $d$  daug mažesnis už atstumą iki stebimojo taško  $r$ ,  $d \ll r$ .

Nagrinsime statinius laukus, kai  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ .



1 pav.: Elektrinio dipolio geometrija.

13. Elektrinis ir magnetinis dipoliai

Elektrinis dipolis

Elektrinio dipolio laukas

Elektrinio dipolio laukas grafiškai

Magnetinis dipolis

Magnetinio dipolio potencialas

Integravimo geometrija

Magnetinio dipolio laukas

Magnetinio dipolio laukas grafiškai

$\mathbf{P}$  ir  $\mathbf{M}$  fizikinė prasmė

Elektrinis dipolis ir poliarizacijos vektorius

Magnetinis dipolis ir įmagnetėjimo vektorius

Literatūra

## Elektrinio dipolio laukas

Turėjome taškinio krūvio potencialą:

$$\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1)$$

Pasinaudoję šiuo potencialu, galime apskaičiuoti dipolio potencialą:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r})}{r^3}, \quad (2)$$

čia  $\mathbf{p}_e = q\mathbf{d}$  yra dipolio momentas, o  $\mathbf{d} = \mathbf{z}_0 d$  – kryptis iš neigiamo į teigiamą krūvį.

Apskaičiuosime elektrinio dipolio kuriamą elektrinį lauką:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left( \vec{r}_0 2 \cos \theta + \vec{\theta}_0 \sin \theta \right). \quad (3)$$

Nuo koordinatinių sistemos nepriklausanti elektrinio lauko išraiška:

$$\mathbf{E} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\mathbf{r}_0(\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r}_0) - \mathbf{p}_e). \quad (4)$$

13. Elektrinis ir magnetinis dipoliai

Elektrinis dipolis  
Elektrinio dipolio laukas

Elektrinio dipolio laukas grafiškai

Magnetinis dipolis  
Magnetinio dipolio

potencialas  
Integravimo geometrija

Magnetinio dipolio laukas

Magnetinio dipolio laukas grafiškai

$\mathbf{P}$  ir  $\mathbf{M}$  fizikinė prasmė

Elektrinis dipolis ir poliarizacijos vektorius

Magnetinis dipolis ir įmagnetėjimo vektorius

Literatūra

## Elektrinio dipolio laukas grafiškai

13. Elektrinis ir magnetinis dipoliai

Elektrinis dipolis  
Elektrinio dipolio laukas

Elektrinio dipolio laukas grafiškai

Magnetinis dipolis

Magnetinio dipolio potencialas

Integravimo geometrija

Magnetinio dipolio laukas

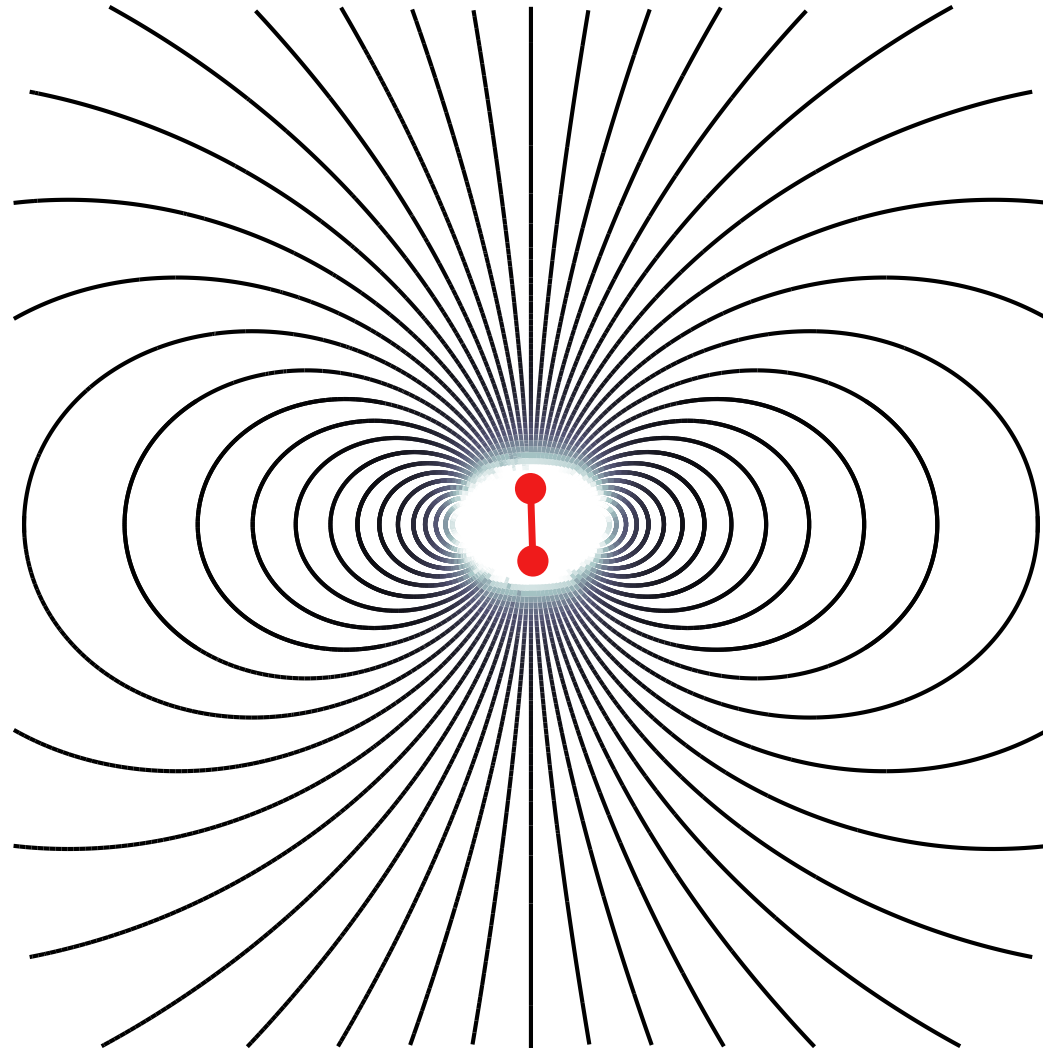
Magnetinio dipolio laukas grafiškai

$\mathbf{P}$  ir  $\mathbf{M}$  fizikinė prasmė

Elektrinis dipolis ir poliarizacijos vektorius

Magnetinis dipolis ir įmagnetėjimo vektorius

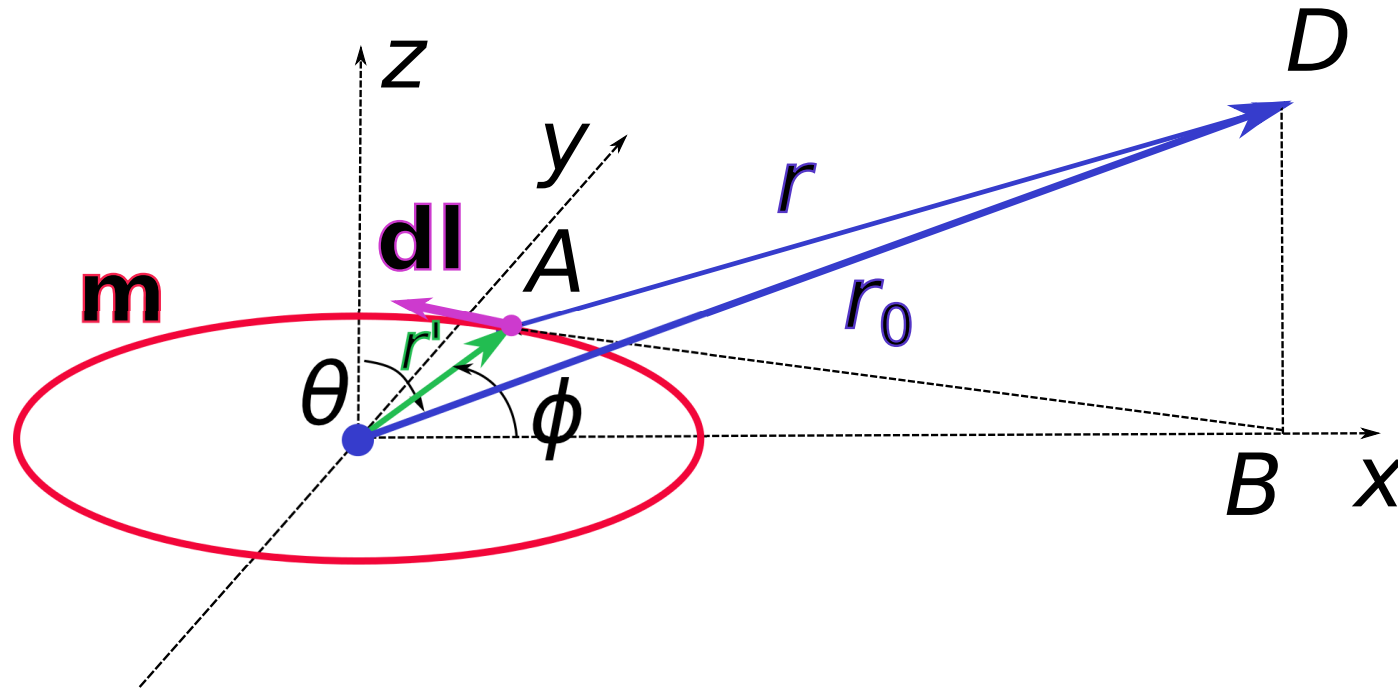
Literatūra



2 pav.: Elektrinio dipolio laukas.

## Magnetinis dipolis

Magnetinį dipolį sudaro skaidulinė srovė, tekanti uždaru kontūru, kurio diametras daug mažesnis už atstumą iki stebimojo taško,  $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}|$ .



3 pav.: Magnetinio dipolio geometrija.

13. Elektrinis ir magnetinis dipoliai

Elektrinis dipolis  
Elektrinio dipolio laukas  
Elektrinio dipolio laukas grafiškai

Magnetinis dipolis

Magnetinio dipolio potencialas  
Integravimo geometrija

Magnetinio dipolio laukas  
Magnetinio dipolio laukas grafiškai

$\mathbf{P}$  ir  $\mathbf{M}$  fizikinė prasmė

Elektrinis dipolis ir poliarizacijos vektorius  
Magnetinis dipolis ir įmagnetėjimo vektorius

Literatūra

## Magnetinio dipolio potencialas

Apskaičiuosime magnetinio dipolio kuriamą vektorinį potencialą  $\mathbf{A}$  iš vektorinės Puasono lygties

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad (5)$$

pasinaudodami Gryno funkcija – taškinio šaltinio potencialu [Matulis, 2001]:

$$\Delta \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (6)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (7)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \int_V \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (8)$$

Magnetinio dipolio momentas:  $\mathbf{m} = \mathbf{z}_0 IS$ ,  $S = \pi R^2$ .

Srovės tankis:  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \vec{\phi}_0 I \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ .

13. Elektrinis ir magnetinis dipoliai

Elektrinis dipolis  
Elektrinio dipolio laukas  
Elektrinio dipolio laukas grafiškai

Magnetinis dipolis

Magnetinio dipolio potencialas

Integravimo geometrija

Magnetinio dipolio laukas

Magnetinio dipolio laukas grafiškai

$\mathbf{P}$  ir  $\mathbf{M}$  fizikinė prasmė

Elektrinis dipolis ir poliarizacijos vektorius

Magnetinis dipolis ir įmagnetėjimo vektorius

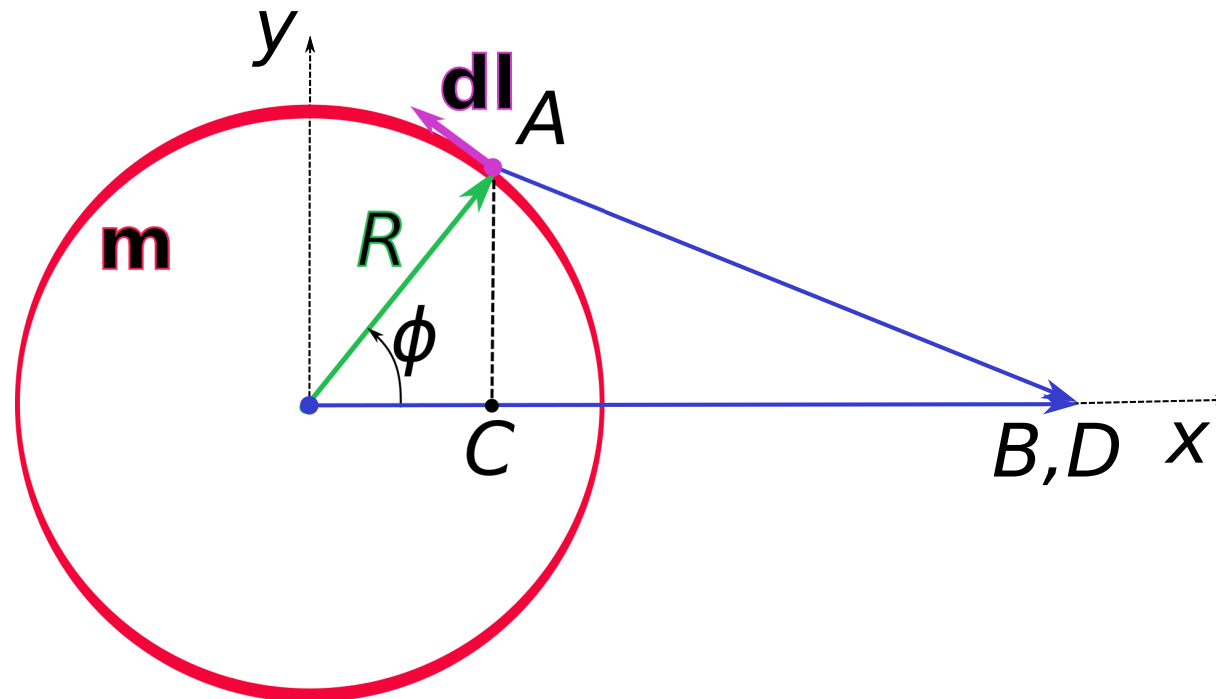
Literatūra

## Magnetinio dipolio laukas – integravimo geometrija

13. Elektrinis ir magnetinis dipoliai

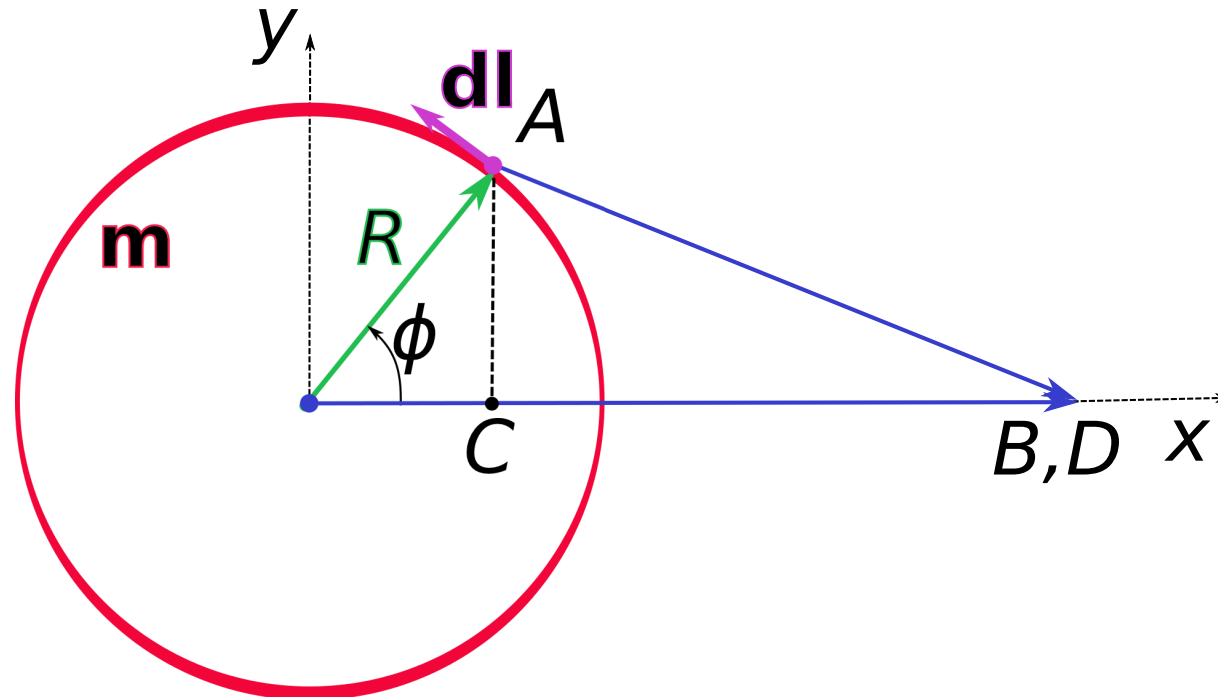
---

Elektrinis dipolis  
Elektrinio dipolio laukas  
Elektrinio dipolio laukas grafiškai  
Magnetinis dipolis  
Magnetinio dipolio potencialas  
Integravimo geometrija  
Magnetinio dipolio laukas  
Magnetinio dipolio laukas grafiškai  
**P** ir **M** fizikinė prasmė  
Elektrinis dipolis ir poliarizacijos vektorius  
Magnetinis dipolis ir įmagnetėjimo vektorius  
Literatūra



4 pav.: Magnetinio dipolio lauko skaičiavimas – integravimo geometrija.

## Magnetinio dipolio laukas – integravimo geometrija



4 pav.: Magnetinio dipolio lauko skaičiavimas – integravimo geometrija.

Suintegravę gauname vektorinį potencialą

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \vec{\phi}_0 \frac{\mu_0 I R^2}{4r^2} \sin \theta = \vec{\phi}_0 \frac{m \mu_0}{4\pi r^2} \sin \theta. \quad (9)$$

13. Elektrinis ir magnetinis dipoliai

Elektrinis dipolis  
Elektrinio dipolio laukas

Elektrinio dipolio laukas grafiškai

Magnetinis dipolis

Magnetinio dipolio potencialas

Integravimo geometrija

Magnetinio dipolio laukas

Magnetinio dipolio laukas grafiškai

$\mathbf{P}$  ir  $\mathbf{M}$  fizikinė prasmė

Elektrinis dipolis ir poliarizacijos vektorius

Magnetinis dipolis ir įmagnetėjimo vektorius

Literatūra



## Magnetinio dipolio laukas

Magnetinio dipolio laukas apskaičiuotas pagal vektorinį potencialą:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{m}{4\pi r^3} \left( \vec{\mathbf{r}}_0 2 \cos \theta + \vec{\theta}_0 \sin \theta \right). \quad (10)$$

Palyginimui elektrinio dipolio kuriamas elektrinis laukas:

$$\mathbf{E} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left( \vec{\mathbf{r}}_0 2 \cos \theta + \vec{\theta}_0 \sin \theta \right). \quad (11)$$

Vadinasi, elektrinio ir magnetinio dipolių laukų linijos *tolimojoje zonoje* (toli nuo dipolio) yra vienodos, nors elektrinio dipolio laukas yra *potencialinis*, o magnetinio dipolio – *sūkurinis*,

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi,$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Kai  $r \rightarrow 0$  elektrinio dipolio  $\mathbf{E}$  lauko jėgų linijos yra trūkios, o magnetinio dipolio  $\mathbf{B}$  laukas – visur tolydus.

13. Elektrinis ir magnetinis dipoliai

Elektrinis dipolis  
Elektrinio dipolio laukas

Elektrinio dipolio laukas grafiškai

Magnetinis dipolis

Magnetinio dipolio potencialas

Integravimo geometrija

Magnetinio dipolio laukas

Magnetinio dipolio laukas grafiškai

$\mathbf{P}$  ir  $\mathbf{M}$  fizikinė prasmė

Elektrinis dipolis ir poliarizacijos vektorius

Magnetinis dipolis ir įmagnetėjimo vektorius

Literatūra

## Magnetinio dipolio laukas grafiškai

### 13. Elektrinis ir magnetinis dipoliai

Elektrinis dipolis  
Elektrinio dipolio laukas  
Elektrinio dipolio laukas grafiškai

Magnetinis dipolis  
Magnetinio dipolio potencialas  
Integravimo geometrija  
Magnetinio dipolio laukas

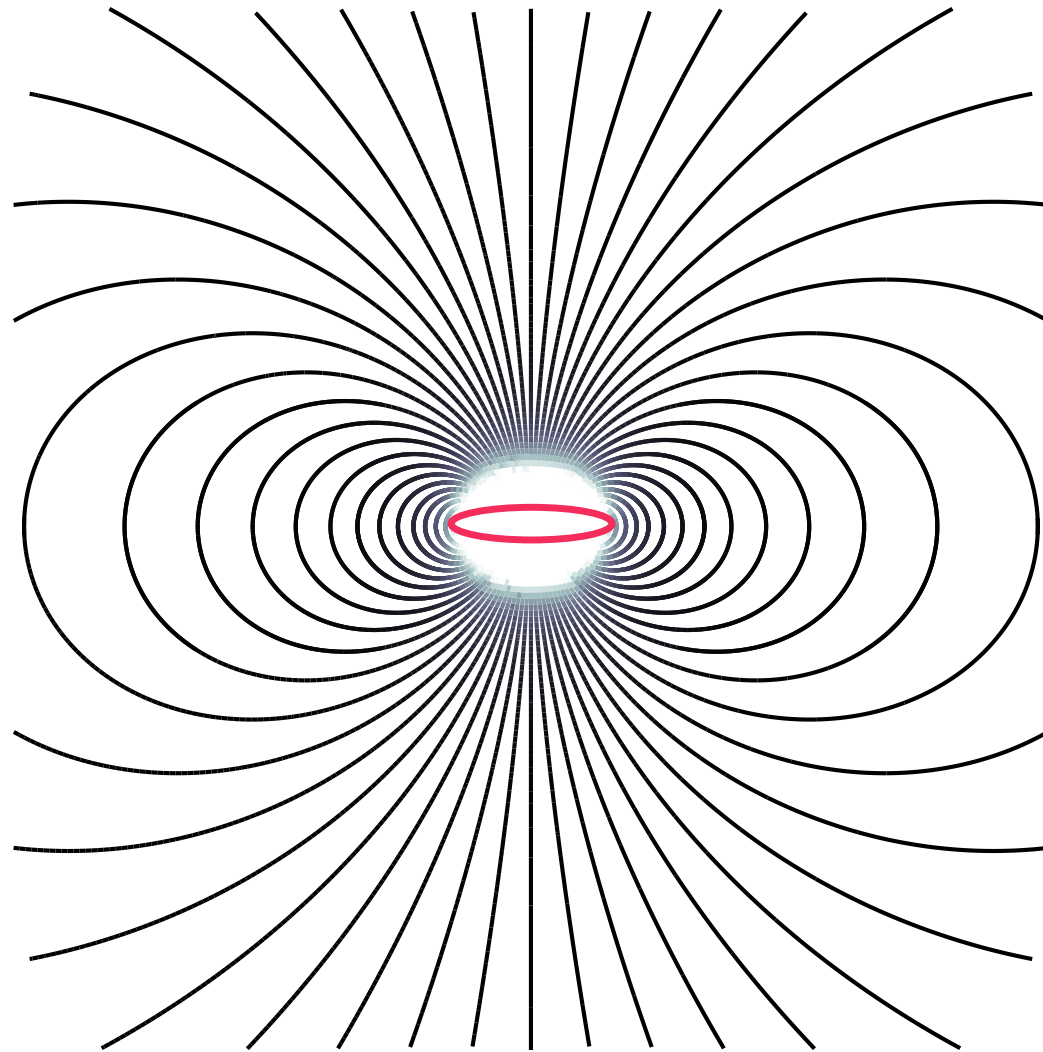
Magnetinio dipolio laukas grafiškai

**P** ir **M** fizikinė prasmė

Elektrinis dipolis ir poliarizacijos vektorius

Magnetinis dipolis ir įmagnetėjimo vektorius

Literatūra



5 pav.: Magnetinio dipolio laukas.

## Elektrinės poliarizacijos ir įmagnetėjimo vektorių fizikinė prasmė

13. Elektrinis ir magnetinis dipoliai

Elektrinis dipolis

Elektrinio dipolio laukas

Elektrinio dipolio laukas grafiškai

Magnetinis dipolis

Magnetinio dipolio

potencialas

Integravimo geometrija

Magnetinio dipolio laukas

Magnetinio dipolio laukas grafiškai

**P** ir **M** fizikinė prasmė

Elektrinis dipolis ir poliarizacijos vektorius

Magnetinis dipolis ir įmagnetėjimo vektorius

Literatūra

Surasime sąryšius tarp elektrinio ir magnetinio dipolių bei  $\mathbf{P}$  ir  $\mathbf{M}$  vektorių naudodamiesi tik matematinėmis elektromagnetinio lauko išraiškomis. Nagrinėdami poliarizacijos potencialus esame suradę nehomogenines bangos lygtis, kurių šaltiniai yra  $\mathbf{P}$  ir  $\mathbf{M}$ , kurias tenkina elektrinis  $\mathbf{\Pi}_e$  ir magnetinis  $\mathbf{\Pi}_m$  Herco vektoriai:

$$\Delta \mathbf{\Pi}_e - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_e}{\partial t^2} = -\mathbf{P}, \quad (12)$$

$$\Delta \mathbf{\Pi}_m - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_m}{\partial t^2} = -\mathbf{M}. \quad (13)$$

Statinių laukų atveju kai  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ , šios lygtys tampa vektorinėmis Puasono lygtimis:

$$\Delta \mathbf{\Pi}_e = -\mathbf{P}, \quad \Delta \mathbf{\Pi}_m = -\mathbf{M}. \quad (14)$$

kurių sprendinius galima surasti pasinaudojus Gryno funkcija – taškinio šaltinio kuriamu potencialu:

$$\Delta \mathbf{\Pi}_{e0} = -\mathbf{p}\delta(\mathbf{r}), \quad \mathbf{\Pi}_{e0} = \frac{\mathbf{p}}{4\pi r}, \quad (15)$$

čia  $\mathbf{p}$  – pastovus vektorius,  $r = |\mathbf{r}|$ .

## Elektrinis dipolis ir poliarizacijos vektorius

Apskaičiuosime šio Herco vektoriaus kuriamą  $\mathbf{E}$  lauką kai  $\mathbf{p} = p\mathbf{z}_0$ :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad div } \mathbf{\Pi}_{e0} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left( \vec{\mathbf{r}}_0 2 \cos \theta + \vec{\theta}_0 \sin \theta \right), \quad (16)$$

t.y.  $\mathbf{\Pi}_e$  aprašo dipolio lauką.

Iš Gryno teoremos seka, kad elektrinė poliarizacija  $\mathbf{P}$  turi *dipolinio momento tankio* prasmę, nes

$$\mathbf{\Pi}_e = \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{P}(\mathbf{r}') dv' = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (17)$$

Todėl elektrinę poliarizaciją galima užrašyti kaip

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V} \int_V \sum_i \mathbf{p}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dv = \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{p}_i. \quad (18)$$

13. Elektrinis ir magnetinis dipoliai

Elektrinis dipolis  
Elektrinio dipolio laukas  
Elektrinio dipolio laukas grafiškai

Magnetinis dipolis  
Magnetinio dipolio potencialas

Integravimo geometrija

Magnetinio dipolio laukas

Magnetinio dipolio laukas grafiškai

$\mathbf{P}$  ir  $\mathbf{M}$  fizikinė prasmė

Elektrinis dipolis ir poliarizacijos vektorius

Magnetinis dipolis ir įmagnetėjimo vektorius

Literatūra

## Magnetinis dipolis ir įmagnetėjimo vektorius

Panašiu būdu galima išvesti  $\mathbf{H}$  lauko lygtis magnetiniam dipoliui:

$$\Delta \Pi_m = -\mathbf{M}, \quad (19)$$

$$\Delta \Pi_{m0} = -\mathbf{m}\delta(\mathbf{r}), \quad (20)$$

$$\Pi_{m0} = \frac{\mathbf{m}}{4\pi r}, \quad \mathbf{m} = m\mathbf{z}_0, \quad (21)$$

$$\mathbf{H} = \frac{m}{4\pi r^3} \left( \vec{\mathbf{r}}_0 2 \cos \theta + \vec{\theta}_0 \sin \theta \right), \quad (22)$$

čia  $\mathbf{M}$  įgyja *magnetinio momento tankio* prasmę:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \int_V \sum_i \mathbf{m}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dv = \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{m}_i. \quad (23)$$

13. Elektrinis ir magnetinis dipoliai  
Elektrinis dipolis  
Elektrinio dipolio laukas  
Elektrinio dipolio laukas grafiškai  
Magnetinis dipolis  
Magnetinio dipolio potencialas  
Integravimo geometrija  
Magnetinio dipolio laukas  
Magnetinio dipolio laukas grafiškai  
 $\mathbf{P}$  ir  $\mathbf{M}$  fizikinė prasmė  
Elektrinis dipolis ir poliarizacijos vektorius  
Magnetinis dipolis ir įmagnetėjimo vektorius  
Literatūra

# Literatūra



## 13. Elektrinis ir magnetinis dipoliai

Elektrinis dipolis  
Elektrinio dipolio laukas

Elektrinio dipolio laukas grafiškai

Magnetinis dipolis

Magnetinio dipolio potencialas

Integravimo geometrija

Magnetinio dipolio laukas

Magnetinio dipolio laukas grafiškai

**P** ir **M** fizikinė prasmė

Elektrinis dipolis ir poliarizacijos vektorius

Magnetinis dipolis ir įmagnetėjimo vektorius

Literatūra

[Jackson, 1999] Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics*. Wiley.

[Kybartas and Šugurovas, 1977] Kybartas, V. and Šugurovas, V. (1977). *Elektrodinamika*. Mokslas.

[Matulis, 2001] Matulis, A. (2001). *Elektrodinamika*. Virtuali leidykla-knygynas, Ciklonas.

## 14. Elementarieji EM spinduoliai

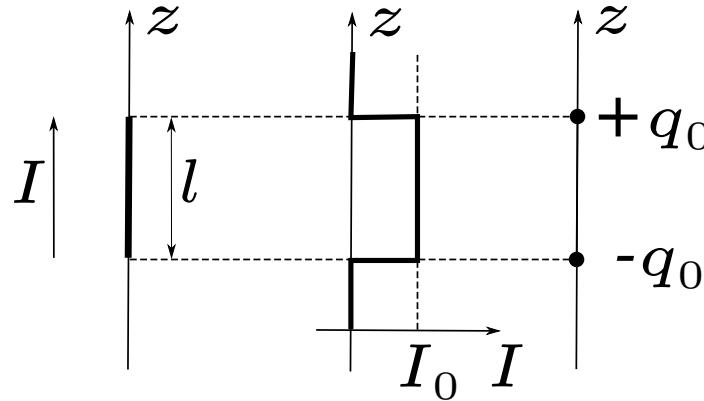
Elementarusis  
elektrinis  
spinduolis  
Elektrinio dipolio  
Herco vektorius  
Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (1)  
Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (2)  
Elektrinio  
spinduolio laukas  
Artimoji zona  
Tolimoji zona  
Tolimosios zonos  
Pointingo  
vektorius  
Elementarusis  
magnetinis  
spinduolis  
Magnetinio  
spinduolio laukas  
Magnetinio  
spinduolio  
Pointingo  
vektorius  
Spinduliavimo  
galia (1)  
Spinduliavimo  
galia (2)  
Spinduliavimo  
diagrama  
Literatūra

# 14. Elementarieji elektrinis ir magnetinis spinduoliai

## Elementarusis elektrinis spinduolis

Elementarųjį elektrinį spinduolį arba *Herco dipolį* sudaro trumpas srovės elementas, kurio ilgis  $l \ll \lambda$ . Tokiu atveju srovę galima aprašyti pastovia kompleksine amplitude  $I_0$ :

$$I = I_0 e^{i\omega t}, \quad I_0 = j_0 S, \quad \mathbf{j}_0 = \mathbf{z}_0 j_0.$$



1 pav.: Herco dipolio geometrija.

Toks srovės elementas ekvivalentiškas laidininko galuose susikaupusiems taškiniais krūviams  $q_0$ , virpantiems dažniu  $\omega$ :  $q_0 = \pm i I_0 / \omega$ .

Su krūviais susijęs dipolio momentas

$$\mathbf{p}_0 = -i \frac{I_0 l}{\omega} \mathbf{z}_0. \quad (1)$$

14. Elementarieji EM spinduoliai

Elementarusis elektrinis spinduolis

Elektrinio dipolio

Herco vektorius

Zomerfeldo

spinduliavimo

sąlyga (1)

Zomerfeldo

spinduliavimo

sąlyga (2)

Elektrinio

spinduolio laukas

Artimoji zona

Tolimoji zona

Tolimosios zonos

Pointingo

vektorius

Elementarusis

magnetinis

spinduolis

Magnetinio

spinduolio laukas

Magnetinio

spinduolio

Pointingo

vektorius

Spinduliavimo

galia (1)

Spinduliavimo

galia (2)

Spinduliavimo

diagrama

Literatūra



## Elektrinio dipolio Herco vektorius

Elektrinio dipolio lauką aprašantis elektrinis Herco vektorius  $\mathbf{\Pi}_e$  tenkina nehomogeninę bangos lygtį:

$$\Delta \mathbf{\Pi}_e - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_e}{\partial t^2} = -\mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p} \delta(\mathbf{r}).$$

Statinio dipolio atveju turėjome sprendinį:

$$\mathbf{\Pi}_{e0} = \frac{\mathbf{p}}{4\pi r}, \quad r = |\mathbf{r}|.$$

Harmoninės trimatės bangos lygties (Helmholco lygties) sprendinys:

$$\mathbf{\Pi}_e = \mathbf{\Pi}_{e0} e^{i(\omega t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = \frac{\mathbf{p}_0}{4\pi r} e^{i(\omega t \mp kr)}. \quad (2)$$

Kai  $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = k' - ik''$ ,  $r \rightarrow \infty$ , fizikinę prasmę turi tik vienas sprendinys:

$$\mathbf{\Pi}_e = \frac{\mathbf{p}_0}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)}. \quad (3)$$

14. Elementarieji  
EM spinduliai

Elementarusis  
elektrinis  
spinduoelis

Elektrinio dipolio  
Herco vektorius

Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (1)

Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (2)

Elektrinio  
spindulio laukas

Artimoji zona

Tolimoji zona

Tolimosios zonos

Pointingo

vektorius

Elementarusis  
magnetinis

spinduoelis

Magnetinio  
spindulio laukas

Magnetinio

spindulio

Pointingo

vektorius

Spinduliavimo

galia (1)

Spinduliavimo

galia (2)

Spinduliavimo

diagrama

Literatūra

## Zomerfeldo spinduliavimo sąlyga (1)

Zomerfeldo spinduliavimo sąlyga aprašo Helmholco bangos lygties sprendinio vienareikšmiškumą: šaltinio išspinduliuota elektromagnetinė energija turi išsisklaidyti begalybėje.

Harmoniškai kintančio elektromagnetinio lauko potencialai – tiek skaliarinis  $\varphi$ , tiek vektorinis  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$  – bendru atveju aprašomi skaliarine Helmholco lygtimi

$$\Delta u_0(\mathbf{r}) + k^2 u_0(\mathbf{r}) = f_0(\mathbf{r}), \quad (4)$$

čia  $u = u_0 e^{i\omega t}$  gali būti viena iš  $\varphi$ ,  $A_x$ ,  $A_y$  arba  $A_z$ ,  $f = f_0 e^{i\omega t}$  yra šaltinio funkcija (krūvio arba srovės tankis).

Bet kokio šaltinio  $f(\mathbf{r})$  spinduliuojamą lauką rasime turėdami Gryno funkciją  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , kuri aprašo taškinio šaltinio kuriamą potencialą:

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (5)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6)$$

14. Elementarieji  
EM spinduliai

Elementarusis  
elektrinis  
spinduoelis  
Elektrinio dipolio  
Herco vektorius  
Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (1)

Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (2)

Elektrinio  
spindulio laukas  
Artimoji zona  
Tolimoji zona

Tolimosios zonos  
Pointingo

vektorius  
Elementarusis  
magnetinis  
spinduoelis

Magnetinio  
spindulio laukas  
Magnetinio

spindulio  
Pointingo  
vektorius

Spinduliavimo  
galia (1)

Spinduliavimo  
galia (2)

Spinduliavimo  
diagrama

## Zomerfeldo spinduliavimo sąlyga (2)

Bendrą  $u_0(\mathbf{r})$  sprendinį užrašysime pasinaudodami Dirako  $\delta$  funkcijos savybėmis ir Gryno teorema:

$$\int_V f(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})dv' = \begin{cases} 0, & \text{jei } \mathbf{r} \notin V, \\ f(\mathbf{r}), & \text{jei } \mathbf{r} \in V, \end{cases} \quad (7)$$

$$\int_V (f\Delta g - g\Delta f)dv = \oint_S \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds, \quad (8)$$

$$u_0(\mathbf{r}) = \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')f_0(\mathbf{r}')dv' + \oint_S \left( u_0(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial u_0(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right) ds'. \quad (9)$$

Kad sprendinys galėtų begalinėje erdvėje,  $r' \rightarrow \infty$ , pointegralinis reiškiny paviršiniame integrale turi virsti nuliu. Šis reikalavimas virsta Zomerfeldo spinduliavimo sąlyga:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u_0(\mathbf{r})}{\partial r} + iku_0(\mathbf{r}) \right) = 0. \quad (10)$$

Vienas iš Zomerfeldo spinduliavimo sąlygą tenkinančių potencialų yra *sferinės* bangos  $u_0(\mathbf{r}) = \frac{u_m(\theta, \phi)}{r} e^{-ikr}$ .

14. Elementarieji  
EM spinduliai

Elementarusis  
elektrinis  
spinduoelis  
Elektrinio dipolio  
Herco vektorius  
Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (1)  
Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (2)

Elektrinio  
spindulio laukas  
Artimoji zona  
Tolimoji zona  
Tolimosios zonos  
Pointingo  
vektorius  
Elementarusis  
magnetinis  
spinduoelis  
Magnetinio  
spindulio laukas  
Magnetinio  
spindulio  
Pointingo  
vektorius  
Spinduliavimo  
galia (1)  
Spinduliavimo  
galia (2)  
Spinduliavimo  
diagrama  
R. Aleksiejūnas – Elektrodinamika, 2012  
Literatūra

## Elektrinio spinduolio laukas

Apskaičiuosime elektrinio Herco vektoriaus kuriamą elektromagnetinį lauką pagal anksčiau išvestas formules:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad div } \mathbf{\Pi}_e - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_e}{\partial t^2}, \quad (11)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} = \text{rot } \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t}. \quad (12)$$

Atlikę veiksmus, gauname tokias elektrinio ir magnetinio laukų išraiškas:

$$\mathbf{E} = -\frac{I_0 l}{4\pi\omega\epsilon_0} \left\{ \vec{\mathbf{r}}_0 2 \cos \theta \left( \frac{i}{r^3} - \frac{k}{r^2} \right) + \vec{\theta}_0 \sin \theta \left( \frac{i}{r^3} - \frac{k}{r^2} - \frac{ik^2}{r} \right) \right\} e^{i(\omega t - kr)}, \quad (13)$$

$$\mathbf{H} = \frac{I_0 l}{4\pi} \vec{\phi}_0 \sin \theta \left( \frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) e^{i(\omega t - kr)}. \quad (14)$$

Herco dipolio spinduliuojamas laukas nepriklauso nuo  $\phi$  (sukimosi simetrija). Priklausomybė nuo atstumo  $\sim \frac{1}{r}$  ir aukštesni laipsniai – tai *sferinės bangos*.

14. Elementarieji  
EM spinduoliai

Elementarusis  
elektrinis  
spinduolis  
Elektrinio dipolio  
Herco vektorius  
Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (1)  
Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (2)

Elektrinio  
spinduolio laukas

Artimoji zona  
Tolimoji zona  
Tolimosios zonos  
Pointingo  
vektorius  
Elementarusis  
magnetinis  
spinduolis  
Magnetinio  
spinduolio laukas  
Magnetinio  
spinduolio  
Pointingo  
vektorius  
Spinduliavimo  
galia (1)  
Spinduliavimo  
galia (2)  
Spinduliavimo  
diagrama

## Artimoji spinduliavimo zona

Artimoji Herco dipolio spinduliavimo zona: kai  $r \ll \lambda$ ,  $kr = \frac{2\pi r}{\lambda} \ll 1$ ,  $e^{-ikr} \approx 1$ , elektromagnetinis laukas tampa:

$$\mathbf{E} \approx \frac{p_0 e^{i\omega t}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left( \vec{\mathbf{r}}_0 2 \cos \theta + \vec{\theta}_0 \sin \theta \right), \quad (15)$$

$$\mathbf{H} \approx \vec{\phi}_0 \frac{i\omega p_0 e^{i\omega t}}{4\pi r^2} \sin \theta. \quad (16)$$

Elektrinio lauko pasiskirstymas yra toks pats kaip ir *statinio elektrinio dipolio*, tik Herco spindulio atveju laukas svyruoja harmoniniu dėsniu  $\text{Re}\{e^{i(\omega t + \varphi_0)}\} = \cos(\omega t + \varphi_0)$  sinfaziškai su dipolio momentu  $p = p_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)}$ . Magnetinio lauko pasiskirstymas primena *Bio ir Savaro dėsni*:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dv'.$$

Pointingo vektoriaus vidurkis

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* \} = 0, \quad (17)$$

t.y. artimojoje zonoje nevyksta elektromagnetinės energijos pernaša (vidutiniškai), energija gali tik svyruoti tarp elektrinio ir magnetinio laukų.

14. Elementarieji EM spinduliai

Elementarusis elektrinis spindulis  
Elektrinio dipolio Herco vektorius Zomerfeldo spinduliavimo sąlyga (1)

Zomerfeldo spinduliavimo sąlyga (2)  
Elektrinio spindulio laukas  
**Artimoji zona**

Tolimoji zona  
Tolimosios zonos Pointingo vektorius  
Elementarusis magnetinis spindulis

Magnetinio spindulio laukas  
Magnetinio spindulio Pointingo vektorius  
Spinduliavimo galia (1)

Spinduliavimo galia (2)

Spinduliavimo diagrama

## Tolimoji spinduliavimo zona

Tolimoji Herco dipolio spinduliavimo zona: kai  $r \gg \lambda$ ,  $kr = \frac{2\pi r}{\lambda} \gg 1$ , elektromagnetinio lauko išraiškose paliekame tik narius su  $\frac{1}{r}$ :

$$\mathbf{E} = \vec{\theta}_0 \frac{iI_0 l \omega \mu_0}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)}, \quad (18)$$

$$\mathbf{H} = \vec{\phi}_0 \frac{iI_0 l \omega \mu_0}{4\pi} \frac{1}{Z_0} \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)}, \quad (19)$$

čia  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  – vakuomo banginė varža. Tolimosios zonos laukas aprašomas sferine banga  $\sim \frac{\exp(i(\omega t - kr))}{r}$ , kurią mažame erdvės plote galima laikyti plokščia – tai vadinamoji *lokaliai plokščia banga*.

$\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{H}$  laukai yra statmeni tarpusavyje bei radialiniam vektoriui  $\mathbf{r}_0$ . Kampinė lauko priklausomybė  $\sim \sin \theta$  nepriklauso nuo atstumo, t.y. banga pilnai susiformavusi.

Galioja skersinės bangos savybės

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z_0} [\mathbf{r}_0 \times \mathbf{E}], \quad \mathbf{E} = Z_0 [\mathbf{H} \times \mathbf{r}_0].$$

14. Elementarieji  
EM spinduliai

Elementarusis  
elektrinis  
spinduoelis  
Elektrinio dipolio  
Herco vektorius  
Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (1)

Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (2)  
Elektrinio  
spindulio laukas  
Artimoji zona

Tolimoji zona

Tolimosios zonos  
Pointingo  
vektorius  
Elementarusis  
magnetinis  
spinduoelis  
Magnetinio  
spindulio laukas

Magnetinio  
spindulio  
Pointingo  
vektorius  
Spinduliavimo  
galia (1)  
Spinduliavimo  
galia (2)

Spinduliavimo  
diagrama

R. Aleksiejūnas – Elektrodinamika, 2012  
Literatūra

Paskaita 14. Elementarieji elektrinis ir magnetinis spinduliai – slide 8

## Tolimosios zonos Pointingo vektorius

Pointingo vektoriaus vidurkis:

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* \} = \mathbf{r}_0 \frac{1}{2} \left( \frac{I_0 l \omega \mu_0}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{Z_0} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}, \quad (20)$$

t.y. tolimojoje zonoje vyksta elektromagnetinės energijos pernaša  $\mathbf{r}_0$  kryptimi – *spinduliavimas*. Ši komponentė  $\sim \frac{1}{r}$ , kuri buvo nykstamai maža artimojoje zonoje, dėl lėto slopimo tampa dominuojanti tolimojoje zonoje.

14. Elementarieji  
EM spinduliai

Elementarusis  
elektrinis  
spinduoelis

Elektrinio dipolio  
Hercio vektorius  
Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (1)

Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (2)

Elektrinio  
spinduolio laukas

Artimoji zona

Tolimoji zona

Tolimosios zonos  
Pointingo  
vektorius

Elementarusis  
magnetinis  
spinduoelis

Magnetinio  
spinduolio laukas

Magnetinio  
spinduolio  
Pointingo

vektorius  
Spinduliavimo  
galia (1)

Spinduliavimo  
galia (2)

Spinduliavimo  
diagrama

## Elementarusis magnetinis spinduolis

Nagrinesime kintamosios srovės  $I = I_0 e^{i\omega t}$  kontūro spinduliuojamą elektromagnetinį lauką.

Magnetinio dipolio momentas:

$$\mathbf{m} = \mathbf{z}_0 I S = \mathbf{z}_0 I_0 \pi l^2 e^{i\omega t}. \quad (21)$$

Tokio dipolio lauką aprašo magnetinis Herco vektorius  $\mathbf{\Pi}_m$ , tenkinantis bangos lygtį:

$$\Delta \mathbf{\Pi}_m - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_m}{\partial t^2} = -\mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{m} \delta(\mathbf{r}).$$

Harmoninės trimatės bangos lygties sprendinys:

$$\mathbf{\Pi}_m = \mathbf{\Pi}_{m0} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = \frac{\mathbf{m}_0}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)}, \quad (22)$$

čia  $\mathbf{m}_0 = \mathbf{z}_0 I_0 \pi l^2$ .

14. Elementarieji  
EM spinduoliai

Elementarusis  
elektrinis  
spinduolis  
Elektrinio dipolio  
Herco vektorius  
Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (1)  
Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (2)  
Elektrinio  
spinduolio laukas  
Artimoji zona  
Tolimoji zona  
Tolimosios zonos  
Pointingo  
vektorius  
Elementarusis  
magnetinis  
spinduolis  
Magnetinio  
spinduolio laukas  
Magnetinio  
spinduolio  
Pointingo  
vektorius  
Spinduliavimo  
galia (1)  
Spinduliavimo  
galia (2)  
Spinduliavimo  
diagrama  
R. Aleksiejūnas – Elektrodinamika, 2012  
Literatūra



## Magnetinio spindulio laukas

$\Pi_m$  kuriamas elektromagnetinis laukas apskaičiuojamas pagal lygtis

$$\mathbf{E} = -\mu_0 \operatorname{rot} \frac{\partial \Pi_m}{\partial t}, \quad (23)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \Pi_m. \quad (24)$$

Atlikę veiksmus, gauname tokias elektrinio ir magnetinio laukų išraiškas:

$$\mathbf{E} = -\frac{i\omega\mu_0 m_0}{4\pi} \vec{\phi}_0 \sin \theta \left( \frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) e^{i(\omega t - kr)}, \quad (25)$$

$$\mathbf{H} = \frac{m_0}{4\pi} \left\{ \vec{\mathbf{r}}_0 2 \cos \theta \left( \frac{i}{r^3} - \frac{k}{r^2} \right) + \vec{\theta}_0 \sin \theta \left( \frac{i}{r^3} - \frac{k}{r^2} - \frac{ik^2}{r} \right) \right\} e^{i(\omega t - kr)}. \quad (26)$$

Magnetiniam spinduliui gavome panašias lauko išraiškas kaip elektrinio spindulio atveju, tik elektrinio ir magnetinio lauko vektoriai yra sukeisti vietomis.

- Elektrinio spindulio laukas:  $E_r, E_\theta, H_\phi \rightarrow \mathbf{H} \perp \mathbf{p}$  – TM laukas.
- Magnetinio spindulio laukas:  $H_r, H_\theta, E_\phi \rightarrow \mathbf{E} \perp \mathbf{m}$  – TE laukas.

14. Elementarieji  
EM spinduliai

Elementarusis  
elektrinis  
spindulis  
Elektrinio dipolio  
Herco vektorius  
Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (1)

Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (2)

Elektrinio  
spindulio laukas

Artimoji zona

Tolimoji zona

Tolimosios zonos

Pointingo

vektorius

Elementarusis

magnetinis

spindulis

Magnetinio  
spindulio laukas

Magnetinio

spindulio

Pointingo

vektorius

Spinduliavimo

galia (1)

Spinduliavimo

galia (2)

Spinduliavimo

diagrama

Literatūra

## Magnetinio spinduolio tolimosios zonos Pointingo vektorius

Artimojoje zonoje magnetinio spinduolio laukas sutampa su statinio magnetinio dipolio lauku, o tolimojoje zonoje spinduliuojamos sferinės (lokaliai plokščios) bangos:

$$\mathbf{E} = \vec{\phi}_0 \frac{m_0 k^2}{4\pi} Z_0 \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)}, \quad (27)$$

$$\mathbf{H} = -\vec{\theta}_0 \frac{m_0 k^2}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)}. \quad (28)$$

Magnetinio spinduolio Pointingo vektoriaus vidurkis:

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* \} = \mathbf{r}_0 \frac{1}{2} \left( \frac{I_0 l^2 k^2}{4} \right)^2 Z_0 \frac{\sin^2 \theta}{r^2}. \quad (29)$$

14. Elementarieji  
EM spinduoliai

Elementarusis  
elektrinis  
spinduolis  
Elektrinio dipolio  
Herco vektorius  
Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (1)  
Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (2)  
Elektrinio  
spinduolio laukas

Artimoji zona  
Tolimoji zona  
Tolimosios zonos  
Pointingo  
vektorius  
Elementarusis  
magnetinis  
spinduolis  
Magnetinio  
spinduolio laukas

Magnetinio  
spinduolio  
Pointingo  
vektorius

Spinduliavimo  
galia (1)  
Spinduliavimo  
galia (2)  
Spinduliavimo  
diagrama

## Spinduliavimo galia (1)

Rasime elektrinio ir magnetinio Herco dipolių pilnutinę išspinduliuojamą galią  $P_s$  kaip vidutinio Pointingo vektoriaus srautą per uždarą paviršių  $S$ :

$$P_s = \oint_S (\langle \mathbf{\Pi} \rangle \cdot d\mathbf{s}). \quad (30)$$

Suintegravę elektrinio ir magnetinio dipolių Pointingo vektorių vidurkių išraiškas (20) ir (29), gausime elektrinio ir magnetinio dipolių spinduliavimo galias

$$P_{se} = \frac{1}{2} I_0^2 R_{se}, \quad (31)$$

$$P_{sm} = \frac{1}{2} I_0^2 R_{sm}, \quad (32)$$

čia  $R_{se}$  ir  $R_{sm}$  yra atitinkamai elektrinio ir magnetinio dipolio ekvivalentinės aktyvinės varžos, arba *spinduliavimo varžos*:

$$R_{se} = \frac{2\pi}{3} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 Z_0, \quad (33)$$

$$R_{sm} = \frac{8\pi^5}{3} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^4 Z_0. \quad (34)$$

14. Elementarieji  
EM spinduliai

Elementarusis  
elektrinis  
spinduolis  
Elektrinio dipolio  
Herco vektorius  
Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (1)  
Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (2)  
Elektrinio  
spindulio laukas  
Artimoji zona  
Tolimoji zona  
Tolimosios zonos  
Pointingo  
vektorius  
Elementarusis  
magnetinis  
spinduolis  
Magnetinio  
spindulio laukas  
Magnetinio  
spindulio  
Pointingo  
vektorius

Spinduliavimo  
galia (1)

Spinduliavimo  
galia (2)

Spinduliavimo  
diagrama

## Spinduliavimo galia (2)

Spinduliavimo varža įvedama atsižvelgiant į Džaulio ir Lenco dėsnį

$$P = \frac{1}{2} I^2 R.$$

Spinduliavimo varža yra ekvivalenti varžai  $R$ , kurioje srovė  $I$  išskiria galią, lygią išspinduliuotai Herco dipolio galiai.

Elektrinio ir magnetinio dipolių išspinduliuojamų galių santykis yra lygus

$$\frac{P_{se}}{P_{sm}} = \frac{R_{se}}{R_{sm}} = \frac{1}{4\pi^4} \left( \frac{\lambda}{l} \right)^2 \sim \lambda^2 \sim \omega^{-2},$$

t.y. žemesnius dažnius geriau spinduliuoja elektrinis dipolis, aukštesnius dažnius – magnetinis dipolis.

14. Elementarieji  
EM spinduliai

Elementarusis  
elektrinis  
spinduolis  
Elektrinio dipolio  
Herco vektorius  
Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (1)

Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (2)

Elektrinio  
spindulio laukas  
Artimoji zona

Tolimoji zona  
Tolimosios zonos  
Pointingo  
vektorius

Elementarusis  
magnetinis  
spinduolis

Magnetinio  
spindulio laukas

Magnetinio  
spindulio  
Pointingo

vektorius  
Spinduliavimo  
galia (1)

Spinduliavimo  
galia (2)

Spinduliavimo  
diagrama

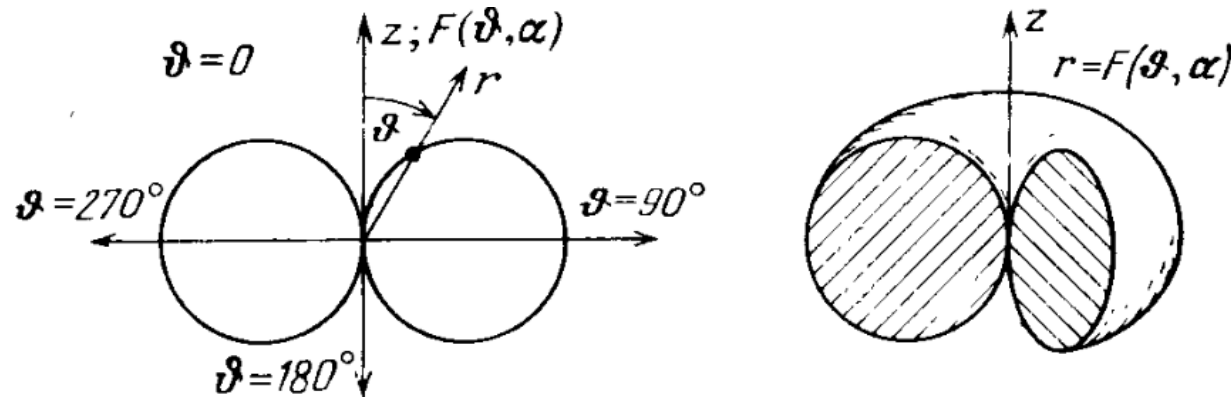
R. Aleksiejūnas – *Elektrodinamika, 2012*  
Literatūra

Paskaita 14. Elementarieji elektrinis ir magnetinis spinduliai – slide 14

## Dipolio spinduliavimo diagrama

Pagrindinė antenos charakteristika – *spinduliavimo (kryptingumo) diagrama*, apibūdinanti kampinį elektromagnetinio lauko pasiskirstymą:

$$F(\theta, \phi) = \frac{\sqrt{\langle \mathbf{\Pi}(\theta, \phi) \rangle}}{\sqrt{\langle \mathbf{\Pi}_{\max} \rangle}} = |\sin \theta|. \quad (35)$$



2 pav.: Erdvinė dipolio spinduliavimo diagrama.

14. Elementarieji  
EM spinduliai

Elementarusis  
elektrinis  
spinduoelis  
Elektrinio dipolio  
Herco vektorius  
Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (1)  
Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (2)  
Elektrinio  
spindulio laukas  
Artimoji zona  
Tolimoji zona  
Tolimosios zonos  
Pointingo  
vektorius  
Elementarusis  
magnetinis  
spinduoelis  
Magnetinio  
spindulio laukas  
Magnetinio  
spindulio  
Pointingo  
vektorius  
Spinduliavimo  
galia (1)  
Spinduliavimo  
galia (2)

Spinduliavimo  
diagrama

R. Aleksiejūnas – *Elektrodinamika*, 2012  
Literatūra

# Literatūra



## 14. Elementarieji EM spinduliai

Elementarusis  
elektrinis  
spinduolis  
Elektrinio dipolio  
Herco vektorius  
Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (1)  
Zomerfeldo  
spinduliavimo  
sąlyga (2)  
Elektrinio  
spindulio laukas  
Artimoji zona  
Tolimoji zona  
Tolimosios zonos  
Pointingo  
vektorius  
Elementarusis  
magnetinis  
spinduolis  
Magnetinio  
spindulio laukas  
Magnetinio  
spindulio  
Pointingo  
vektorius  
Spinduliavimo  
galia (1)  
Spinduliavimo  
galia (2)  
Spinduliavimo  
diagrama

R. Aleksiejūnas – *Elektrodinamika, 2012*  
Literatūra

[Jackson, 1999] Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics*. Wiley.

[Kybartas and Šugurovas, 1977] Kybartas, V. and Šugurovas, V. (1977). *Elektrodinamika*. Mokslas.

[Matulis, 2001] Matulis, A. (2001). *Elektrodinamika*. Virtuali leidykla-knygynas, Ciklonas.

[Nikolskij and Nikolskaya, 1989] Nikolskij, V. and Nikolskaya, T. (1989). *Elektrodinamika i rasprostranenie radiovoln*. Moskva: Nauka.